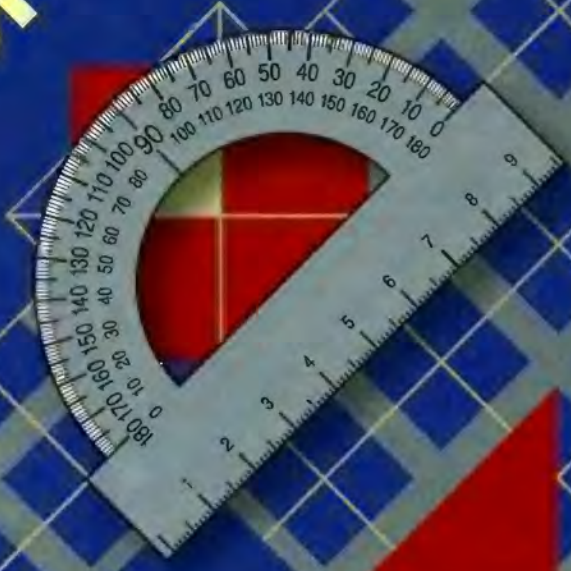
ГЕОМЕТРИЯ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ



8

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ПУНКТАМИ УЧЕБНИКА И ЗАДАЧАМИ ТЕТРАДИ

Номера пунктов учебника	Тема	Номера задач тетради
39, 40	Многоугольник. Выпуклый многоугольник	1—5
41	Четырехугольник	6, 7
42	Параллелограмм	8—14
43	Признаки параллелограмма	15
44	Трапеция	16—18
	Задачи на построение	19, 20
45	Прямоугольник	21—23
46	Ромб и квадрат	24
47	Осевая и центральная симметрии	25, 26
48	Понятие площади многоугольника	27
49, 50	Площадь квадрата. Площадь прямоугольника	28—32
51	Площадь параллелограмма	33—35
52	Площадь треугольника	36—41
53	Площадь трапеции	42—44
54	Теорема Пифагора	45—48
55	Теорема, обратная теореме Пифагора	49, 50
56, 57	Пропорциональные отрезки. Определение подобных треугольников	51—53
58	Отношение площадей подобных треугольников	54
59	Первый признак подобия треугольников	55—58
60	Второй признак подобия треугольников	59
61	Третий признак подобия треугольников	60
62	Средняя линия треугольника	61—65
63	Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике	66—68
64	Практические приложения подобия треугольников	69, 70
66	Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника	71—73
67	Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60°	74—77
68	Взаимное расположение прямой и окружности	78, 79
69	Касательная к окружности	80—84
70	Градусная мера дуги окружности	85, 86
71	Теорема о вписанном угле	87—94
72	Свойства биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку	95—102
73	Теорема о пересечении высот треугольника	103
74	Вписанная окружность	104—108
75	Описанная окружность	109—111
76, 77	Понятие вектора. Равенство векторов	112
78	Откладывание вектора от данной точки	113, 114
79	Сумма двух векторов	115, 116
80, 81	Законы сложения векторов. Правило параллелограмма. Сумма нескольких векторов	117—121
82	Вычитание векторов	122—128
83	Произведение вектора на число	129—133
84	Применение векторов к решению задач	134
85	Средняя линия трапеции	135—137

ГЕОМЕТРИЯ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

8 КЛАСС

Пособие
для учащихся
общеобразовательных
учреждений

12-е издание

Москва
«Просвещение»
2010

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Г36

Авторы:
Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, И. И. Юдина

Рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Геометрия, 7—9» авторов Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова и др. и предназначена для организации решения задач учащимися на уроке после их ознакомления с новым учебным материалом. На этом этапе учащиеся делают первые шаги по осознанию нового материала, освоению основных действий с изучаемым материалом. Поэтому в тетрадь включены только базовые задачи, обеспечивающие необходимую репродуктивную деятельность в форме внешней речи. Наличие текстовых заготовок облегчает ученику выполнение действий в развернутой письменной форме, а учителю позволяет осуществлять во время урока оперативный контроль и коррекцию деятельности учащихся. Использование данной тетради для организации других видов деятельности (самостоятельных работ, повторения, контроля и т. д.) малоэффективно.

Учебное издание
Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Федорович
Глазков Юрий Александрович
Юдина Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая тетрадь
8 класс
Пособие для учащихся
общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редактор *Л. В. Кузнецова*. Младший редактор *Н. В. Ноговицина*. Художники *В. А. Андрианов, В. В. Костин, О. П. Богомолова*. Художественный редактор *О. П. Богомолова*. Компьютерная верстка *Е. А. Стрижевской, О. С. Ивановой*. Технический редактор *Е. Н. Зелянина*. Корректор *Н. Д. Цухай*.

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 20.04.10. Формат 70×100$^{1}/_{16}$. Бумага писчая. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 3,27. Доп. тираж 50 000 экз. Заказ № 30039.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

ISBN 978-5-09-022773-5

© Издательство «Просвещение», 1999
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2006
Все права защищены

Глава V

Четырехугольники

§ 1 Многоугольники

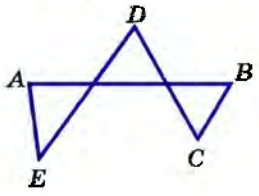
1

На рисунках *а* — *ж* изображены фигуры, составленные из отрезков *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*. Укажите, какие из них являются: а) многоугольниками; б) выпуклыми многоугольниками.

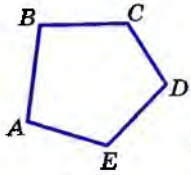
Ответ.

а) Фигуры, изображенные на рисунках _____

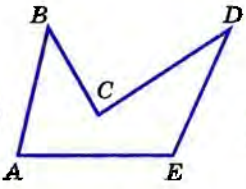
б) Многоугольники, изображенные на рисунках _____



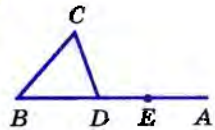
а)



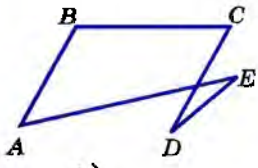
б)



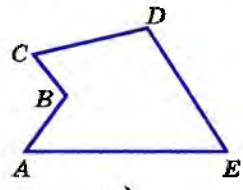
в)



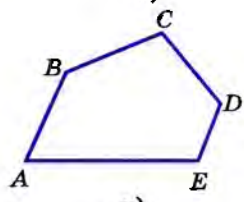
г)



д)



е)

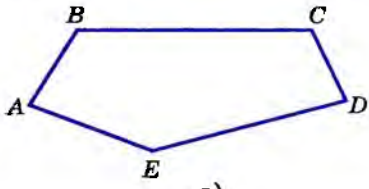


ж)

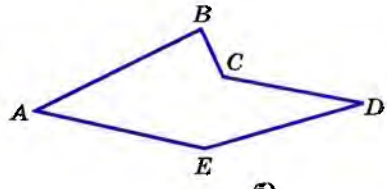
2

Проведите все диагонали в многоугольниках, изображенных на рисунках *а*, *б*, и выпишите их.

Ответ. а) _____ ; б) _____



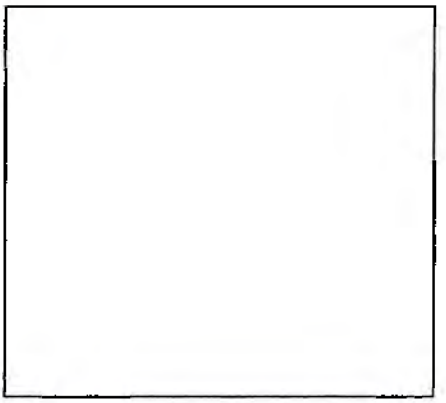
а)



б)

3

Начертите выпуклый семиугольник и из какой-нибудь его вершины проведите все возможные диагонали.



а) Сколько при этом образовалось треугольников?

б) Найдите сумму углов семиугольника.

О т в е т.

а) ____

б) _____°.

4

Используя формулу для вычисления суммы углов выпуклого многоугольника $S_n = 180°(n - 2)$, найдите сумму углов выпуклого:

а) одиннадцатиугольника: $S_{11} = 180° \cdot$ ____ = _____

б) двадцатидвухугольника: $S_{22} = 180° \cdot$ ____ = _____

О т в е т.

а) _____°;

б) _____°.

5

Найдите число сторон выпуклого многоугольника, каждый угол которого равен: а) 135°; б) 150°.

Р е ш е н и е .

а) Сумма всех углов выпуклого n-угольника, каждый угол которого равен 135°, равна $135° \cdot n$; с другой стороны, она равна $(n - 2) \cdot 180°$. Таким образом, $135° \cdot n = (n - 2) \cdot 180°$, или $135° \cdot n = 180° \cdot n - 360°$, откуда $45° \cdot n = 360°$, $n = 8$.

б) _____

_____

_____

_____

О т в е т.

а) $n = 8$;

б) $n =$ ____

6

Найдите сторону BC четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен 22 см, сторона AB на 2 см больше стороны BC и на 2 см меньше каждой из сторон DA и CD.

Р е ш е н и е.

По условию $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 22$ см, $BC = AB -$ $-$ _____, $CD = DA = AB +$ _____

Итак, 22 см = _____ = _____, откуда $AB =$ _____, а $BC =$ _____

О т в е т. $BC =$ _____

7

Найдите углы B, C и D выпуклого четырехугольника $ABCD$, если $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$ и $\angle A = 35°$.

Р е ш е н и е.

Так как по условию $\angle A = \angle B$ и $\angle A = 35°$, то $\angle A + \angle B = 35° \times$ $\times 2 = 70°$. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна ____°, поэтому $\angle C + \angle D =$ ____ $-$ ____ = ____

По условию $\angle C = \angle D$, значит, каждый из них равен ____

О т в е т. $\angle B =$ ____, $\angle C =$ ____, $\angle D =$ ____

§ 2 Параллелограмм и трапеция

8

В параллелограмме $ABCD$ найдите: а) стороны, если BC на 8 см больше стороны AB, а периметр равен 64 см; б) углы, если $\angle A = 38°$.

Р е ш е н и е.

а) По свойству параллелограмма $AB =$ ____, $BC =$ ____ и $\angle A =$ $= \angle$ ____, $\angle B = \angle$ ____. По условию $P_{ABCD} = 64$ см, следовательно, $2(AB + BC) =$ _____, откуда $AB + BC =$ _____, но BC на _____ больше AB, поэтому $AB +$ _____ = 32 см, откуда $AB =$ _____, $BC =$ _____ + 8 см = _____

б) По условию $\angle A = 38°$, а так как $\angle A + \angle B =$ ____°, то $\angle B =$ $=$ ____° $- 38° =$ ____°.

О т в е т. а) $AB =$ ____ = ____ см, $BC =$ ____ = ____ см;

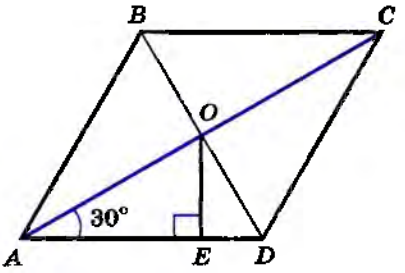
б) $\angle C =$ ____°, $\angle B = \angle$ ____ = ____°.

9

В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC, равная 24 см, образует со стороной AD угол в 30°, O — точка пересечения диагоналей AC и BD, $OE \perp AD$. Найдите длину отрезка OE.

Р е ш е н и е.

Диагонали параллелограмма точкой пересечения _____, поэтому AO = ____ = ____ см. Треугольник AOE — прямоугольный с гипотенузой _____ и острым углом A, равным _____°. Поэтому катет OE, лежащий против угла в ____°, равен _____, т. е. OE = ____ см = ____ см.



О т в е т. ____ см.

10

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке P, причем $BP = PC$. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 54 см.

Р е ш е н и е.

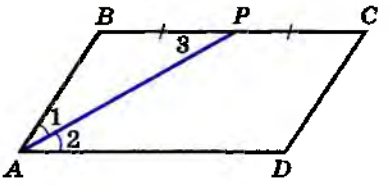
1) $\angle 1 = \angle 2$, так как луч AP — _____, $\angle 2 = \angle 3$, так как эти углы _____ при пересечении параллельных прямых _____ секущей ____. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.

2) Треугольник ABP — _____ _____, так как его углы 1 и 3 равны, поэтому AB = ____

3) По условию $BP = PC$, следовательно, BC = ____ BP = ____ AB.

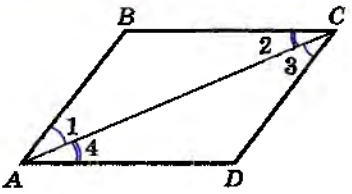
Итак, $P_{ABCD} = 2(AB +$ ____$) =$ ____ AB.

Так как периметр параллелограмма равен 54 см, то ____ $AB = 54$ см, откуда AB = ____ см и BC = ____ см.



О т в е т. $AB = DC =$ ____ см,
$BC = AD =$ ____ см.

11



На рисунке в четырехугольнике $ABCD$ $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

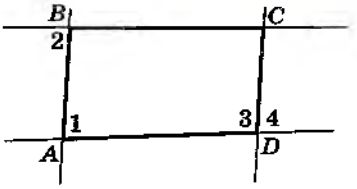
Доказательство.

1) Так как $\angle 1 = \angle 3$, а эти углы — _____ при пересечении прямых _____ и _____ секущей _____, то прямые _____ и _____ параллельны.

2) Так как $\angle 2 = \angle 4$, то прямые _____ и _____ также параллельны.

Итак, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, так как его стороны _____

12



Является ли четырехугольник $ABCD$ на рисунке параллелограммом, если:

а) $\angle 1 = 75°$, $\angle 3 = 105°$, $\angle 2 \neq \angle 4$;

б) $\angle 1 = \angle 2 = 70°$, $\angle 3 = 105°$?

Решение.

а) В четырехугольнике $ABCD$ две стороны AB и CD параллельны, так как $\angle 1 + \angle 3 = 75° + 105° = 180°$, а эти углы — односторонние при пересечении прямых AB и DC секущей AD. Поскольку $AB \parallel DC$, то $\angle 1 = \angle 4$ (как соответственные углы). Две другие стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ не параллельны, так как накрест лежащие углы 1 и 2 не равны ($\angle 1 = \angle 4 \neq \angle 2$). Следовательно, четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом.

б) _____

_____

_____

_____

_____

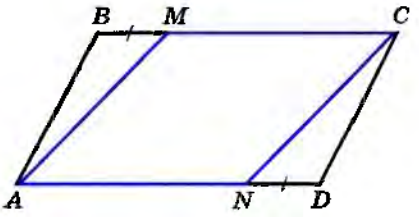
_____

_____

Ответ. а) Нет; б) _____

13

На рисунке в параллелограмме $ABCD$ на сторонах BC и AD отмечены точки M и N так, что $BM = DN$. Докажите, что четырехугольник $AMCN$ — параллелограмм.



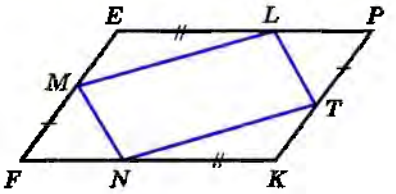
Доказательство.

Так как по условию $ABCD$ — параллелограмм, то его противоположные стороны BC и AD _____ и _____, т. е. ____ ∥ ____, ____ = ____. Так как MC = = _____ – _____, AN = _____ – _____, и так как $BM = DN$, то MC = _____

Таким образом, в четырехугольнике $AMCN$ две противоположные стороны _____ и _____ (_____ ∥ _____, _____ = _____), следовательно, $AMNC$ — _____ _____

14

На сторонах параллелограмма $EFKP$ отмечены точки M, N, T, L так, как показано на рисунке, причем $FM = PT$, $EL = KN$. Докажите, что четырехугольник $MLTN$ — параллелограмм.



Доказательство.

1) Так как $EFKP$ — параллелограмм, то по свойствам параллелограмма $\angle F = \angle$ ___, $\angle E = \angle$ ___ и EF = ____, EP = ____. По условию $FM = PT$, $EL = KN$ и $EM = EF -$ ____, $KT = PK -$ ____, поэтому EM = ____, PL = ____

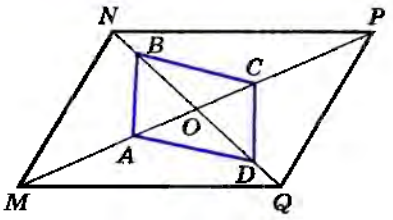
2) $\triangle MEL = \triangle$ _____ по _____ _____. Из равенства этих треугольников следует равенство сторон ML и _____

3) Аналогично $\triangle MFN = \triangle$ _____, откуда MN = ____

Итак, в четырехугольнике $MLTN$ противоположные стороны ____ и ____, ____ и ____ попарно _____, следовательно, $MLTN$ — параллелограмм.

15

На рисунке диагонали параллелограмма $MNPQ$ пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если $OA = \frac{1}{3}OM$, $OB = \frac{2}{3}ON$, $OC = \frac{1}{3}OP$, $OD = \frac{2}{3}OQ$.



Доказательство.

По свойству параллелограмма диагонали MP и NQ точкой пересечения O _____, т. е. ____ = ____ и ____ = ____, поэтому OA = ____ = $\frac{1}{3}$ ____, аналогично OB = ____ = $\frac{2}{3}$ ____.

Итак, в четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD точкой пересечения O _____, поэтому $ABCD$ — _____

16

Найдите углы M и P трапеции $MNPQ$ с основаниями MQ и NP, если $\angle N = 109°$, а $\angle Q = 37°$.

Решение.

Углы M и N, P и Q — _____ при пересечении параллельных прямых MQ и NP секущими ____ и ____, поэтому $\angle M + \angle N$ = ____°, $\angle P + \angle Q$ = ____°. Так как по условию $\angle N = 109°$, $\angle Q = 37°$, то $\angle M$ = ____° − $\angle N$ = ____°, $\angle P$ = ____° − $\angle Q$ = ____°.

Ответ. $\angle M$ = ____°, $\angle P$ = ____°.

17

Один из углов равнобедренной трапеции равен 115°. Найдите остальные углы трапеции.

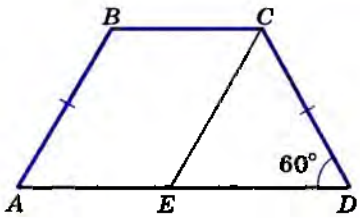
Решение.

Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$, где AD и BC — основания, $\angle B = 115°$. Так как углы при каждом основании равнобедренной трапеции _____, то $\angle C = \angle$ ____ = ____°, а так как сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна ____°, то $\angle A = \angle D$ = ____° − $\angle B$ = ____° − 115° = ____°.

Ответ. $\angle A = \angle D$ = ____°, $\angle C$ = ____°.

18

Найдите основание AD равнобедренной трапеции $ABCD$, если $BC = 10$ см, $AB = 12$ см, $\angle D = 60°$.



Р е ш е н и е.

В трапеции $ABCD$ основания AD и BC параллельны, а боковые стороны AB и CD равны.

Проведем прямую CE, параллельную стороне AB. Полученный четырехугольник $ABCE$ — _____, так как его стороны попарно _____. Поэтому AE = ___ = ___ см, CE = ___ = ___ см, и так как $CD = AB$, то $CE = CD$ = ___ см.

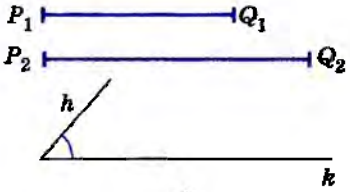
Треугольник CDE — _____ (___ = ___) с углом при основании в 60°, следовательно, этот треугольник — _____ и ED = ___ = ___ см. Значит, AD = $= AE$ + ___ = 10 см + ___ см = ___ см.

О т в е т. AD = ___ см.

Задачи на построение

19

Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы его смежные стороны AB и AD были равны соответственно данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2, а угол A был равен данному углу hk (рисунок *а*).

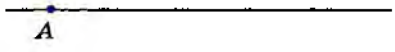


а)

Р е ш е н и е.

1) На рисунке *б* построим треугольник ABD по _____ _____ так, что $AB = P_1Q_1$, $AD = P_2Q_2$ и $\angle A = \angle hk$.

2) Построим треугольник BCD по трем сторонам (сторона BD построена, $BC = AD = P_2Q_2$, $CD = AB = P_1Q_1$) так, чтобы точки A и C лежали по разные стороны от прямой BD.



б)

Четырехугольник $ABCD$ — искомый. Действительно, так как по построению $AB =$ ____ и $BC =$ ____ , то $ABCD$ — _____ _____ . А так как $AB = P_1Q_1$, $AD =$ ____ и $\angle A = \angle$ ____ по построению, то параллелограмм $ABCD$ отвечает всем условиям задачи.

20

Разделите данный на рисунке отрезок AB на 5 равных частей.

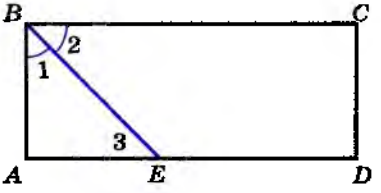
Р е ш е н и е.

На рисунке проведем луч AX, не лежащий на прямой AB, и на нем от точки A отложим пять _____ друг другу отрезков AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5. Проведем прямую A_5B и построим прямые, проходящие через точки A_1, A_2, A_3, A_4 и параллельные прямой ____ . Эти прямые пересекают отрезок AB в точках B_1, B_2, B_3, B_4, которые по теореме Фалеса (задача 385) делят отрезок ____ на _____

§ 3 Прямоугольник, ромб, квадрат

21

Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, изображенного на рисунке, если биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке E и делит ее на отрезки $AE = 17$ см и $ED = 21$ см.



Р е ш е н и е.

1) Так как $ABCD$ — прямоугольник, то $AD \parallel$ ____ и поэтому $\angle 2 =$ $= \angle$ ____ . Но $\angle 2 = \angle$ ____ по условию, следовательно, $\angle 1 = \angle$ ____ и $\triangle ABE$ — _____ с основанием ____ . Значит, $AB =$ _____ = ____ см.

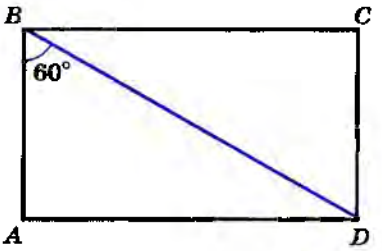
2) $AD = AE + ED =$ _____ + _____ = _____ ; $P_{ABCD} = 2($_____ + + _____$) = 2($____ см + ____ см $) = 2 \cdot$ ____ см = _____ см.

О т в е т. $P_{ABCD} =$ ____ см.

22

В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB равна 12 см, а диагональ BD образует со стороной AB угол в 60°. Найдите диагональ AC.

Р е ш е н и е.



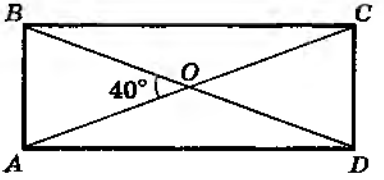
1) В прямоугольном треугольнике ABD $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, поэтому $\angle D =$ ____°, и по свойству катета, лежащего _____, имеем: $BD = 2 \cdot$ ____ = ____ см.

2) Так как в прямоугольнике диагонали _____, то $AC =$ ____ = ____ см.

О т в е т. $AC =$ ____ см.

23

На рисунке в прямоугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O, причем $\angle AOB = 40°$. Найдите $\angle DAO$.



Р е ш е н и е.

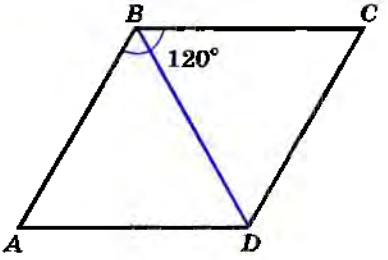
1) Так как $ABCD$ — прямоугольник, то его диагонали _____ и точкой пересечения _____, откуда следует, что $\triangle AOB$ — _____ и $\angle BAO =$ ____ $\cdot (180° -$ ____°) = ____°.

2) $\angle DAO = \angle A - \angle$ ____ = 90° − ____° = ____°.

О т в е т. $\angle DAO =$ ____°.

24

Найдите периметр ромба $ABCD$, изображенного на рисунке, если $\angle B = 120°$, а диагональ $BD = 15$ см.



Р е ш е н и е.

1) Так как диагонали ромба делят _____, то $\angle ABD =$ $= \angle$ ____ = ____°.

2) В треугольнике ABD сторона $AB =$ ____ (так как стороны ромба _____) и $\angle ABD =$ ____°, следовательно, этот треугольник _____ и $AB =$ ____ = ____ = ____ см.

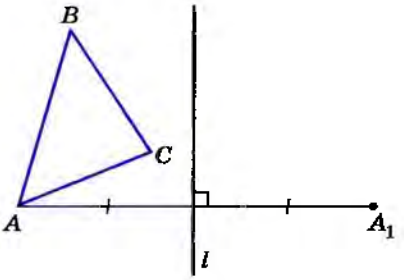
3) $P_{ABCD} = 4 \cdot$ ____ см = ____ см.

Ответ. P_{ABCD} = ____ см.

25

На рисунке изображены треугольник ABC и прямая l. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, симметричный треугольнику ABC относительно прямой l.

Решение.

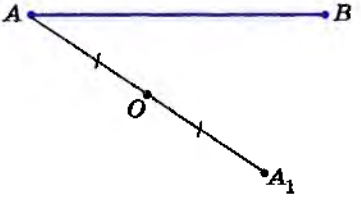


Точка A_1, изображенная на рисунке, симметрична точке A относительно прямой l, так как прямая l — серединный перпендикуляр к отрезку AA_1. Через точки B и C проведем прямые, _____ к прямой l, и отметим на них точки B_1 и C_1 так, чтобы прямая l была _____ _____ к отрезкам BB_1 и ____. Проведем отрезки A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 и получим искомый треугольник $A_1B_1C_1$.

26

На рисунке изображены отрезок AB и точка O. Постройте отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно точки O.

Решение.



Проведем прямую AO и отметим на ней точку A_1 так, чтобы точка O была _____ отрезка AA_1 (см. рисунок). Точка A_1 _____ точке A относительно точки O.

Аналогичным образом построим точку B_1, _____ точке B относительно _____. Отрезок A_1B_1 — искомый.

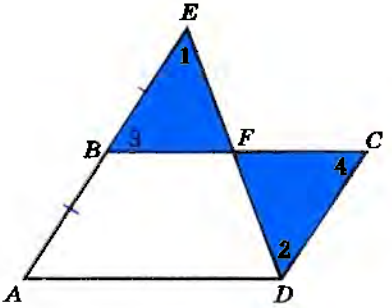
Глава VI

Площадь

§ 1 Площадь многоугольника

27

На рисунке четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, точка E симметрична точке A относительно точки B. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{ADE}$.



Доказательство.

1) $\triangle BEF = \triangle CDF$ по стороне и двум прилежащим к ней углам ($AB =$ $= ____ = ____$, $\angle 1 = ____$, $\angle 3 = ____$, так как эти углы _____ _____ при пересечении параллельных прямых ____ и ____ секущими ____ и ____), поэтому $S_{BEF} = ____$

2) $S_{ABCD} = S_{ABFD} + ____$, $S_{ADE} = S_{ABFD} +$ $+ ____$, поэтому $S_{ABCD} = ____$

28

Найдите площадь квадрата, если его сторона равна:

а) 3,2 см;

б) $2\sqrt{3}$ дм.

Решение.

Так как площадь S квадрата со стороной a равна a^2, то:

а) $S = (____ \text{ см})^2 = _____ \text{ см}^2$;

б) $S = (____ \text{ дм})^2 = ____ \text{ дм}^2$.

Ответ.

а) _____ см^2;

б) ____ дм^2.

29

Найдите сторону a квадрата, если его площадь S равна: а) 64 см^2; б) 1,69 дм^2.

Р е ш е н и е.

Так как площадь S квадрата со стороной a равна a^2, то $a = \sqrt{}$

а) $a = \sqrt{____}$ см^2 = ____ см; б) $a = \sqrt{____}$ дм^2 = ____ дм.

О т в е т. а) ____ см; б) ____ дм.

30

Смежные стороны прямоугольника равны 4,2 см и 3,5 см. Найдите площадь S этого прямоугольника.

Р е ш е н и е.

S = ____ см · ____ см = ____ см^2.

О т в е т. ____ см^2.

31

Пусть a и b — смежные стороны прямоугольника, а S — его площадь. Найдите сторону b, если a = 12 см, а S = 192 см^2.

Р е ш е н и е.

192 см^2 = ____ см · b , откуда b = ____ см^2 : ____ см = ____ см.

О т в е т. b = ____ см.

32

Площадь прямоугольника $ABCD$, изображенного на рисунке, равна Q, точка M — середина стороны DC. Найдите площадь треугольника ABE.

Р е ш е н и е.

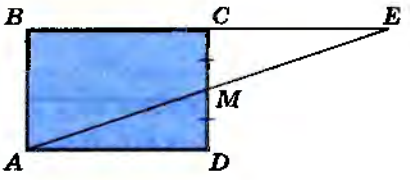
1) $\triangle ADM = \triangle ECM$ по _____

_____

_____ (DM = ____ по условию, $\angle D$ = ____ = ____°, $\angle AMD$ = ____ , так как эти углы _____

_____), поэтому S_{ADM} = _____

2) $S_{ABE} = S_{ABCM}$ + _____ = S_{ABCM} + + _____ = _____ = ____



О т в е т. S_{ABE} = ____

§ 2 Площади параллелограмма, треугольника и трапеции

33

Пусть a — основание, h — высота, S — площадь параллелограмма. Найдите:

а) S, если $a = 16$ см, $h = 9$ см;

б) a, если $h = 4{,}8$ см, $S = 48$ см^2;

в) h, если $a = 3{,}5$ дм, $S = 14$ дм^2.

Р е ш е н и е .

а) $S =$ _____ $\cdot$ _____ $=$ _____ см^2;

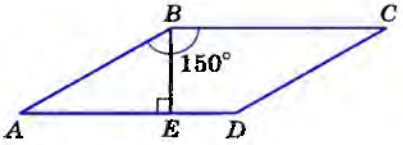
б) 48 см$^2 = a \cdot$ _____ см, откуда $a =$ _____ см^2 : _____ см $=$ _____ см;

в) 14 дм$^2 = 3{,}5$ дм $\cdot\ h$, откуда $h =$ _____ : _____ $=$ _____ дм.

О т в е т. а) $S =$ _____ см^2; б) $a =$ _____ см; в) $h =$ _____ дм.

34

На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$ с высотой BE.



Найдите S_{ABCD}, если $AB = 13$ см, $AD = 16$ см, $\angle B = 150°$.

Р е ш е н и е .

1) $\angle A =$ _____° $- 150° =$ _____°, так как сумма углов, _____ _____, равна _____°.

2) $\triangle ABE$ — прямоугольный с острым углом A, равным _____, поэтому $BE =$ _____ $=$ _____ см.

3) $S_{ABCD} =$ _____ $\cdot$ _____ $=$ _____ см^2.

О т в е т. $S_{ABCD} =$ _____ см^2.

35

На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$ с высотой BE. Найдите S_{ABCD}, если $AE = ED$, $BE = 3{,}2$ см, $\angle A = 45°$.

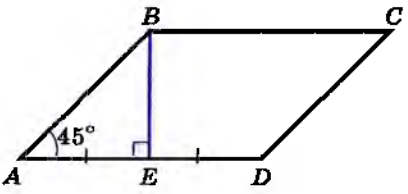
Р е ш е н и е .

1) $\triangle ABE$ — прямоугольный и $\angle A = 45°$, следовательно, $\angle B =$ _____° и $\triangle ABE$ — _____. Поэтому _____ $= BE = 3{,}2$ см.

2) Так как по условию $AE = ED$, то $AD = 2$ _____ = _____

3) S_{ABCD} = _____ · _____ = = _____

Ответ. S_{ABCD} = _____



36

Пусть a — основание, h — высота, S — площадь треугольника. Найдите:

а) S, если $a = 5{,}4$ см, $h = 6$ см;

б) h, если $a = 12$ см, $S = 42$ см^2;

в) a, если $h = 2{,}4$ дм, $S = 4{,}32$ дм^2.

Решение.

а) $S = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}$ _____ · _____ = _____ см^2;

б) h = _____ : a = _____ : _____ = _____ см;

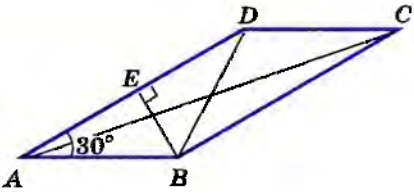
в) $a = 2S$: _____ = _____ : _____ = _____ дм.

Ответ.

а) S = _____ см^2; б) h = _____ см; в) a = _____ дм.

37

На рисунке смежные стороны параллелограмма $ABCD$, равные 6 см и 10 см, образуют угол в 30°. Найдите площадь треугольника ABC.



Решение.

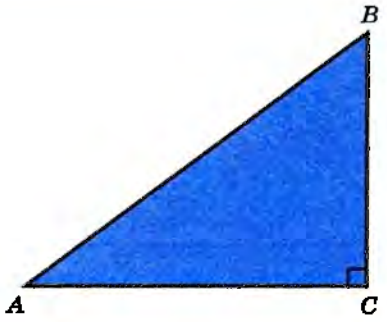
1) Пусть $AB = 6$ см, $AD = 10$ см, $\angle A = 30°$. Так как диагональ параллелограмма делит его на два _____, то $\triangle ABC = \triangle$ _____, и поэтому S_{ABC} = _____ = _____ S_{ABCD}.

2) $S_{ABCD} = AD \cdot BE$, где BE — _____ параллелограмма. Остается найти BE. $\triangle ABE$ — прямоугольный и $\angle A = 30°$, поэтому катет _____, лежащий _____, равен _____, т. е. $BE = \frac{1}{2}$ _____ = _____ см, $S_{ABCD} = 10$ см · ____ см = ____ см^2, а $S_{ABC} = \frac{1}{2}$ · _____ = _____ см^2.

Ответ. S_{ABC} = _____ см^2.

38

Площадь прямоугольного треугольника равна 96 см². Найдите катеты этого треугольника, если известно, что один из них составляет $\frac{3}{4}$ другого.



Р е ш е н и е.

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC, изображенном на рисунке, $BC = \frac{3}{4}\ AC$.

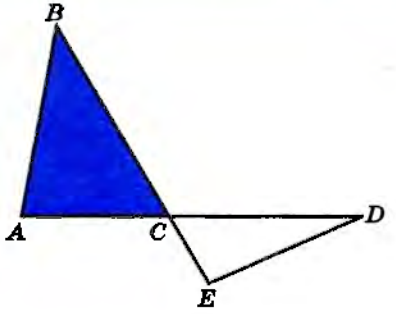
Так как площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, то $S_{ABC} = \frac{1}{2}$ ____ · ____ = $\frac{1}{2}$ ____ × × $\frac{3}{4}$ ____ = _____

По условию S_{ABC} = 96 см², поэтому 96 см² = _____, откуда AC^2 = _____ см² и AC = _____ см, а BC = _____ см.

О т в е т. _____ см и _____ см.

39

На рисунке AC = 8 см, BC = 12 см, CD = 10 см, CE = 4 см, S_{ABC} = 48 см². Найдите S_{CDE}.



Р е ш е н и е.

Треугольники ABC и CDE имеют по равному углу ($\angle ACB = \angle DCE$, так как эти углы вертикальные), поэтому по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, получаем $S_{CDE} : S_{ABC}$ = = _____ см · _____ см : _____ см · _____ см = _____, откуда S_{CDE} = = _____ S_{ABC}. Так как по условию S_{ABC} = 48 см², то S_{CDE} = _____ × × _____ см² = _____ см².

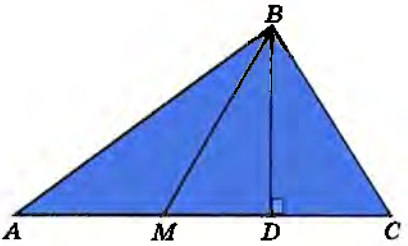
О т в е т. S_{CDE} = _____ см².

40

На рисунке точка M делит сторону AC треугольника ABC в отношении $AM : MC = 2 : 3$. Площадь треугольника ABC равна 180 см². Найдите площадь треугольника ABM.

Р е ш е н и е.

Треугольники ABM и ABC имеют общую высоту BD, поэтому их площади относятся как основания _____ и _____. Так как по условию $AM : MC = 2 : 3$, то $AM : AC =$ _____ : _____ и $S_{ABM} : S_{ABC} =$ _____ : _____, откуда $S_{ABM} =$ _____ $S_{ABC} =$ _____ $\cdot$ 180 см^2 = _____ см^2.

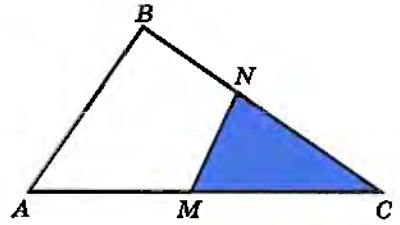


О т в е т. _____ см^2.

41

На рисунке $CN = \frac{1}{2}AC$, $CM = \frac{2}{3}BC$, $S_{MNC} = 18$ см^2.

Найдите S_{ABC}.



Р е ш е н и е.

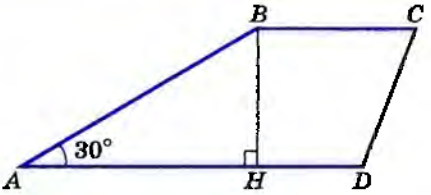
По теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, $S_{ABC} : S_{MNC} =$ _____ : _____

Так как по условию $CM = \frac{2}{3}BC$, $CN = \frac{1}{2}AC$ и $S_{MNC} = 18$ см^2, то $S_{ABC} = 18$ см^2. $\frac{AC \cdot BC}{\frac{2}{3}BC \cdot \frac{1}{2}AC} = 18$ см^2 $\cdot$ _____ = _____ см^2.

О т в е т. $S_{ABC} =$ _____ см^2.

42

В трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, $AB = 12$ см, $AD = 15$ см, $BC = 7$ см, $\angle A = 30°$. Найдите площадь S трапеции.



Р е ш е н и е.

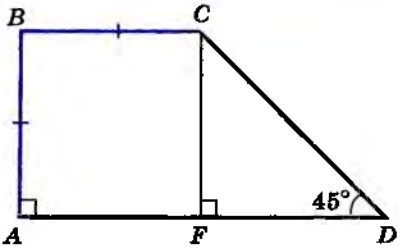
Проведем высоту BH трапеции $ABCD$.

1) $\triangle ABH$ — прямоугольный, $\angle H = 90°$ по построению, $\angle A = 30°$ по условию, поэтому $BH = \frac{1}{2}$ _____ = _____ см.

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC +$ _____$) \cdot$ _____ = _____ см^2 = _____ см^2.

О т в е т. _____ см^2.

43



В прямоугольной трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, $AB = BC = 9$ см, $\angle D = 45°$.

Найдите площадь трапеции.

Р е ш е н и е.

Проведем $CF \perp AD$.

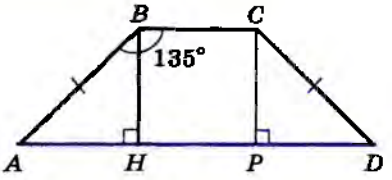
1) $ABCF$ — квадрат, так как у прямоугольника $ABCF$ смежные стороны AB и _____, поэтому $AF = CF =$ _____ см.

2) $\triangle CFD$ — прямоугольный, $\angle F = 90°$ по построению, $\angle D = 45°$ по условию, поэтому $\angle DCF =$ _____° и, следовательно, $\triangle CFD$ — _____ и $DF =$ _____ = _____ см.

3) $AD = AF +$ _____ = _____ см + _____ см = _____ см и $S_{ABCD} =$ = _____ = _____ = _____ см^2.

О т в е т. _____ см^2.

44



В равнобедренной трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, BH — высота, $\angle B = 135°$, $AH = 2{,}8$ см, $HD = 6{,}8$ см.

Найдите площадь трапеции.

Р е ш е н и е.

Проведем $CP \perp AD$.

1) Так как трапеция $ABCD$ — равнобедренная, то $DP =$ _____ = _____ см, поэтому $HP = HD -$ _____ = 6,8 см – _____ см = _____ см; $AD = AH +$ _____ = _____ см + _____ см = _____ см.

2) Четырехугольник $HBCP$ — прямоугольник, поэтому $BC =$ = _____ = _____ см.

3) $\angle HBC = 90°$, а так как $\angle ABC = 135°$, то $\angle ABH = \angle ABC -$ – _____ = _____. $\triangle ABH$ — прямоугольный ($\angle H = 90°$, $\angle B = 45°$) и _____, поэтому $BH =$ _____ = _____ см.

4) $S_{ABCD} =$ _____ = _____ см · _____ см = _____ см^2.

О т в е т. _____ см^2.

§ 3 Теорема Пифагора

45

В прямоугольном треугольнике a и b — катеты.

Найдите: а) b, если $a = 8$, $c = 12$; б) c, если $a = 4\sqrt{2}$, $b = 7$;

в) a, если $b = 3\sqrt{3}$, $c = 5\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$.

а) $b^2 = c^2 - __$, откуда $b = \sqrt{c^2 - __} = \sqrt{144 - __} = \sqrt{__} = ____$

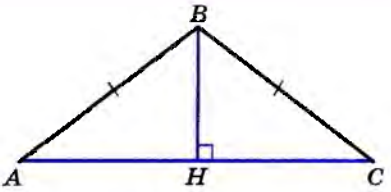
б) $c^2 = __ + __$, откуда $c = \sqrt{__ + __} = \sqrt{__ + __} = \sqrt{__} = ____$

в) $a^2 = c^2 - __$, откуда $a = \sqrt{__ - __} = \sqrt{__ - __} = ____$

О т в е т. а) ____; б) ____; в) ____

46

На рисунке в равнобедренном треугольнике ABC основание $AC = 16$ см, высота $BH = 6$ см. Найдите боковую сторону.



Р е ш е н и е.

1) Так как $\triangle ABC$ — равнобедренный с основанием AC, то $AB = BC$ и высота BH является _____, значит, $AH = \frac{1}{2}__ = __$ см.

2) Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора находим: $AB = \sqrt{____ + ____} = \sqrt{____ + ____}$ см $= ____$ см.

О т в е т. ____ см.

47

По гипотенузе $c = 14$ и катету $b = 7$ прямоугольного треугольника найдите высоту h, проведенную к гипотенузе.

Р е ш е н и е.

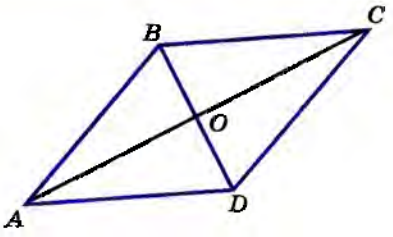
1) Пусть a — второй катет прямоугольного треугольника, тогда по теореме Пифагора $a = \sqrt{__ - __} = \sqrt{____ - ____} = \sqrt{____} = ____$

2) Площадь S прямоугольного треугольника равна $\frac{1}{2}a __$, а с другой стороны, $S = \frac{1}{2}c __$, поэтому $a __ = c __$, откуда $h = ____$

О т в е т. ____

48

На рисунке диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, $AB = 13$ см, $BD = 10$ см. Найдите AC и S_{ABCD}.



Р е ш е н и е.

1) Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то $BD \perp$ _____ и $\triangle ABO$ — _____, причем гипотенуза _____ = 13 см по условию, а катет $BO = \frac{1}{2}$ _____ = $\frac{1}{2}\cdot$ _____ см = _____ см. По теореме Пифагора находим: $AO = \sqrt{__ - __} = \sqrt{__ - __}$ см = _____ см, $AC = 2$ _____ = 2 · _____ см = _____ см.

2) Площадь ромба можно вычислить по формуле $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ (задача 476 учебника), откуда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot$ _____ см · _____ см = _____ см^2.

О т в е т. _____ см^2.

49

Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами 15, 20 и 25.

Р е ш е н и е.

Так как $25^2 = 20^2 + 15^2$ (625 = 400 + 225), то по теореме, обратной _____, данный треугольник — _____ _____. Гипотенуза является наибольшей стороной этого треугольника, а высота h, проведенная к гипотенузе, _____

Так как $h \cdot 25 = 15 \cdot 20$, то h = _____ = _____

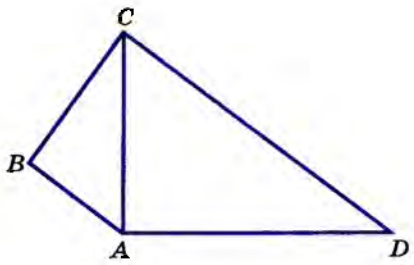
О т в е т. _____

50

Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, $CD = 25$ см, $AD = 20$ см, $AC = 15$ см.

Р е ш е н и е.

1) Так как $15^2 = 12^2 + 9^2$ и $25^2 = 20^2 + 15^2$, то по теореме, обратной _____ _____, треугольники ABC и DAC — _____



2) $S_{ABCD} = S_{ABC} +$ _____ = $\frac{1}{2}$ _____ · _____ + + $\frac{1}{2}$ _____ · _____ = _____ (см^2).

О т в е т. _____ см^2.

Подобные треугольники

§ 1 Определение подобных треугольников

51

Даны отрезки: $AB = 12$ см, $CD = 8$ см, $EF = 15$ см, $KL = 30$ см, $MN = 16$ см, $PQ = 20$ см. Найдите среди них пары пропорциональных отрезков.

Р е ш е н и е.

1) Так как $\frac{AB}{EF} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, $\frac{MN}{PQ} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$, то $\frac{AB}{EF} = \frac{MN}{PQ}$, т. е. отрезки AB и MN пропорциональны отрезкам EF и PQ.

2) Так как $\frac{CD}{MN} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, $\frac{EF}{__} = \frac{15}{__} = ____$, то $\frac{CD}{MN} = ____$, т. е. отрезки CD и ____ пропорциональны отрезкам MN и ____

3) Так как $\frac{AB}{CD} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, $\frac{KL}{__} = \frac{30}{__} = \frac{3}{2}$, то $\frac{__}{__} = \frac{__}{__}$, т. е. отрезки ____ и ____ пропорциональны отрезкам ____ и ____

О т в е т. _____

52

Подобны ли треугольники ABC и DEF, в которых $\angle A = 98°$, $\angle B = 44°$, $\angle F = 38°$, $\angle D = 98°$, $AB = 12$, $AC = 21$, $BC = 30$, $DF = 7$, $EF = 10$, $DE = 4$?

Р е ш е н и е.

1) $\angle A = \angle D = 98°$ по условию. В треугольнике ABC имеем: $\angle C = 180° - (____° + ____°) = ____°$, поэтому $\angle C = \angle ____ = ____°$. В треугольнике DEF имеем: $\angle E = 180° - (____° + ____°) = ____°$, поэтому $\angle B = \angle ____ = ____°$.

Итак, углы треугольников ABC и DEF соответственно равны.

2) Рассмотрим отношения сходственных сторон треугольников ABC и DEF: $\frac{AB}{DE} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1}$, $\frac{AC}{DF} = \frac{21}{7} = \frac{3}{1}$, $\frac{BC}{EF} = \frac{30}{10} = \frac{3}{1}$, поэтому $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, т. е. стороны треугольника ABC _____

_____

Итак, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ по _____

Ответ.

Треугольники ABC и DEF _____

53

В подобных треугольниках ABC и EDF стороны AB и ED, BC и DF являются сходственными. Найдите стороны AB и AC треугольника ABC, если $ED = 3$ см, $DF = 5$ см, $EF = 7$ см, $BC = 15$ см.

Решение.

В подобных треугольниках ABC и EDF стороны BC и DF являются сходственными по условию, поэтому коэффициент k подобия этих треугольников равен $\frac{BC}{DF}$, т. е. $k =$ _____ : _____ = _____

Следовательно, $AB = k \cdot$ _____ = _____ $\cdot$ _____ см = _____ см, $AC = k \cdot$ _____ = _____ $\cdot$ _____ см = _____ см.

Ответ.

$AB =$ _____ см, $AC =$ _____ см.

54

Площади двух подобных треугольников равны 35 дм^2 и 315 дм^2. Одна из сторон первого треугольника равна 14 дм. Найдите сходственную ей сторону второго треугольника.

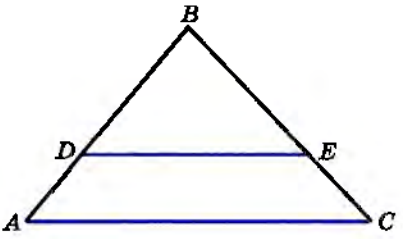
Решение.

Пусть k — коэффициент подобия треугольников, тогда по теореме об отношении площадей подобных треугольников получим: $k^2 =$ _____ дм^2: _____ дм^2 = _____, откуда $k =$ _____. Искомая сторона a второго треугольника в _____ раза больше сходственной ей стороны первого треугольника, т. е. $a =$ _____ $\cdot$ 14 дм = _____ дм.

Ответ. _____ дм.

55

На рисунке $DE \parallel AC$. Докажите, что треугольники ABC и DBE подобны, и найдите коэффициент подобия k, если $AB = 21$ см, $AD = 7$ см.



Р е ш е н и е .

1) $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ по двум углам ($\angle$ ___ — общий, $\angle A =$ ___ , так как эти углы — _____ при пересечении параллельных прямых ___ и ___ секущей ___).

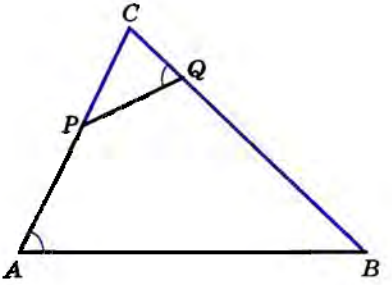
2) Так как коэффициент k подобия треугольников ABC и DBE равен отношению сходственных сторон, то $k = AB :$ ___

$DB = AB -$ ___ $=$ ___ см $-$ ___ см $=$ ___ см, и поэтому $k =$ ___ см : ___ см $=$ ___

О т в е т . ___

56

На рисунке $\angle PQC = \angle A$, $BC = 18$ см, $CP = 6$ см, $CQ = 4$ см. Найдите сторону AC.



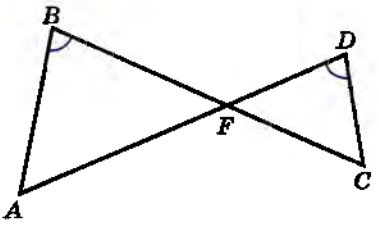
Р е ш е н и е .

$\triangle CPQ \sim \triangle CBA$ по _____ ($\angle$ ___ — общий, $\angle PQC = \angle$ ___ по условию). Стороны CP и CB, CQ и _____ — сходственные стороны этих подобных треугольников, поэтому коэффициент k подобия равен $CP :$ ___ $=$ ___ см : ___ см $=$ ___ и $CQ : AC =$ ___, откуда $AC =$ ___ $CQ =$ $=$ ___ см.

О т в е т . ___ см.

57

На рисунке $\angle B = \angle D$, $\frac{AF}{CF} = \frac{3}{2}$, $BF = 15$ см. Найдите DF.



Р е ш е н и е.

1) $\triangle ABF \sim \triangle CDF$ по _____ ($\angle$ ____ = $\angle$ ____ по условию, $\angle AFB$ = = $\angle$ _____, так как эти углы _____ _____).

2) AF и FC — сходственные стороны подобных треугольников ABF и CDF, поэтому коэффициент k подобия равен ____ : ____ = = ____

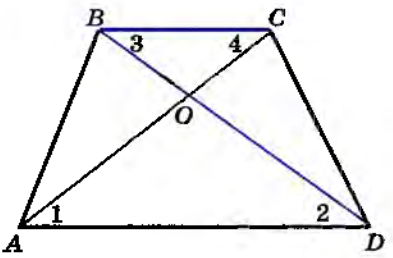
3) Так как BF и DF тоже являются сходственными сторонами, то $BF : DF =$ _____, откуда $DF =$ _____ $BF =$ _____ см = = _____ см.

О т в е т.

_____ см.

58

Диагонали трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, пересекаются в точке O, $BO = 3{,}2$ см, $OD = 6{,}4$ см, $BC = 4{,}8$ см. Найдите AD.



Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) $\triangle AOD \sim \triangle COB$ по _____ _____ ($\angle 1 = \angle$ _____, $\angle 2 = \angle$ _____, так как эти углы — _____ при пересечении параллельных прямых _____ и _____ секущими _____ и _____).

2) OD и OB — сходственные стороны подобных треугольников AOD и COB, поэтому $k =$ _____ = _____ см : _____ см = _____

3) AD и BC также сходственные стороны этих треугольников, поэтому $AD : BC = k$, откуда $AD =$ _____ · _____ = _____ · _____ см = = _____ см.

О т в е т.

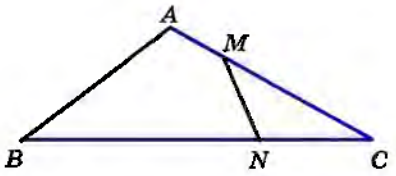
_____ см.

59

На рисунке $BC = 18$ см, $CM = 9$ см, $CN = 6$ см, $AC = 12$ см. Докажите, что треугольники ABC и MNC подобны.

Доказательство.

$\angle C$ — _____ угол треугольников _____ и _____. Рассмотрим отношения сторон, заключающих этот угол: $AC : CN =$ = _____ см : _____ см = _____, $BC : CM$ = _____ см : _____ см = _____. Эти отношения _____, поэтому стороны _____ и _____ треугольника ABC пропорциональны сторонам _____ и _____ треугольника MNC. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle$ _____ по _____ признаку подобия треугольников.



60

Докажите, что треугольники MNP и CDE подобны, если стороны $MN = 7{,}5$ см, $MP = 4{,}5$ см, $PN = 6$ см, $DE = 24$ см, $EC = 18$ см, $CD = 30$ см.

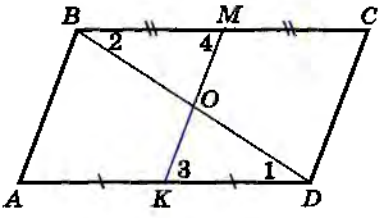
Доказательство.

Так как $MN : CD$ = _____ см : _____ см = _____, $MP : CE$ = = _____ см : _____ см = _____ и $NP : DE$ = _____ см : _____ см = = _____, то стороны MN, _____ и _____ треугольника MNP _____ сторонам _____, _____ и _____ треугольника _____. Следовательно, по _____ _____ $\triangle MNP \sim \triangle CDE$.

§ 3 Применение подобия к решению задач и доказательству теорем

61

Точки K и M — середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$, изображенного на рисунке. Отрезки KM и BD пересекаются в точке O. Докажите, что KO — средняя линия треугольника ABD.



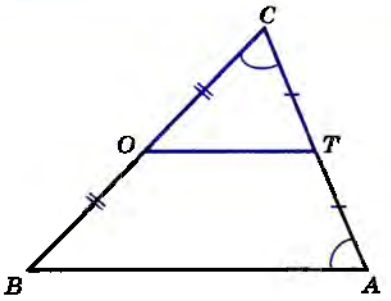
Доказательство.

Докажем, что точка O — середина стороны _____ треугольника ABD. По условию задачи $DK = \frac{1}{2}$ _____ и $BM =$ _____. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, следовательно, $AD =$ = _____, поэтому и KD _____ BM.

Так как $AD \parallel$ _____, то $\angle 1 = \angle$ ___ и $\angle 3 = \angle$ ___. Следовательно, $\triangle OKD = \triangle$ _____. Отсюда получаем: $OD =$ _____

Итак, точки K и O — _____ сторон AD и _____ треугольника ABD, поэтому KO — его _____ линия, что и требовалось доказать.

62



В треугольнике ABC отрезок OT — средняя линия, $\angle A = \angle C$.

а) Докажите, что треугольник COT равнобедренный.

б) Найдите периметр треугольника COT, если периметр треугольника ABC равен 18 см.

Решение.

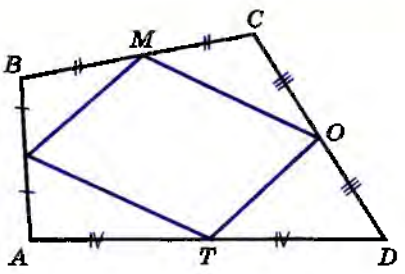
а) Так как OT — _____ линия треугольника ABC, то $OT \parallel$ _____, поэтому $\angle CTO = \angle$ ____ $= \angle C$. Следовательно, треугольник COT — _____

б) Так как OT — средняя _____ треугольника ABC, то $OT = \frac{1}{2}$ _____, $CO =$ ___ BC и $CT =$ _____. Следовательно,

$$P_{COT} = OT + CO + \text{____} = \frac{1}{2}AB + \text{____} + \text{____} =$$
$$= \text{____}\,(AB + \text{____} + \text{____}) = \text{____}\,P_{ABC} = \text{____}\ \text{см}.$$

Ответ. _____

63



Точки K, M, O, T — середины сторон четырехугольника $ABCD$.

а) Докажите, что четырехугольник $KMOT$ — параллелограмм.

б) Найдите периметр четырехугольника $KMOT$, если $AC = 12$ см, $BD =$ $= 16$ см.

Р е ш е н и е.

а) Проведем диагональ AC четырехугольника $ABCD$. В треугольнике ABC точки K и M — _____ сторон AB и _____, поэтому отрезок KM — его средняя _____, и следовательно, $KM \parallel$ _____ и $KM =$ _____ AC.

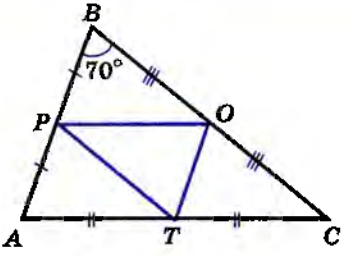
Аналогично отрезок OT — _____ линия треугольника ADC, поэтому OT ___ AC и $OT =$ ___ AC. Отсюда следует, что $KM \parallel OT$ и KM ___ OT, а значит, четырехугольник $KMOT$ является _____

б) По доказанному $KM =$ _____ $AC =$ _____ $\cdot 12 =$ _____ (см) и OT ___ $KM =$ ___ см. Проведем диагональ BD. В треугольниках ABD и BCD отрезки KT и MO — средние _____, следовательно, $KT =$ _____ $BD =$ _____ см и $MO =$ _____ $BD =$ _____ см. Итак, $KT = MO =$ _____ см и $KM = OT =$ _____ см, следовательно, $P_{KMOT} = 2 \cdot$ _____ $+ 2 \cdot$ _____ $=$ _____ см.

О т в е т. _____

64

Площадь треугольника ABC равна 20 см^2, $\angle B = 70°$, точки P, T и O — середины сторон. Найдите: а) $\angle PTO$; б) площадь треугольника OTP.



Р е ш е н и е.

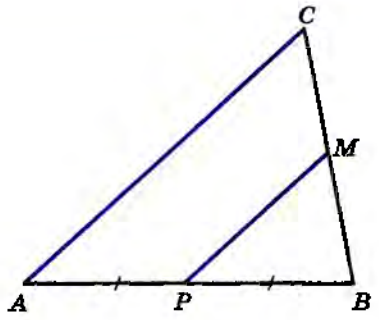
а) Так как точки P, T, O — _____ _____ сторон, то отрезки PT, TO и PO — средние _____ треугольника ABC, следовательно, $PT \parallel$ _____ и $TO \parallel$ _____. Так как противоположные стороны четырехугольника $BPTO$ попарно _____, то этот четырехугольник является _____, поэтому $\angle PTO = \angle$ _____ $=$ _____

б) Так как отрезки PT, TO и PO — средние _____ треугольника ABC, то $PT =$ ___ BC, $TO =$ ___ AB и $PO =$ ___ AC, т. е. $\frac{PT}{BC} = \frac{TO}{__} = \frac{}{AC} = \frac{1}{2}$, поэтому $\triangle OTP$ ___ $\triangle ABC$ с коэффициентом подобия $k =$ ___. Следовательно, $S_{OTP} : S_{ABC} = 1:$ ___, откуда получаем: $S_{OTP} =$ ___ $S_{ABC} =$ ___ $\cdot 20 =$ ___ (см^2).

О т в е т. а) $\angle PTO =$ _____; б) $S_{OTP} =$ ___ см^2.

65

Точка P — середина стороны AB треугольника ABC, $PM \parallel AC$. Докажите, что отрезок PM — средняя линия треугольника ABC.



Доказательство.

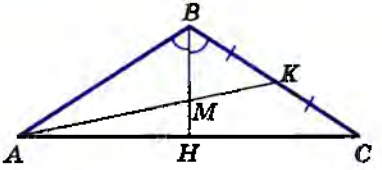
Предположим, что отрезок PM не является средней _____ треугольника ABC, тогда точка M не будет серединой стороны _____. Пусть точка O — середина _____ BC, тогда отрезок PO есть _____ линия треугольника ABC, и поэтому PO ___ AC.

Итак, через точку P проходят ___ прямые (_____ и _____), параллельные прямой _____, что противоречит аксиоме _____ прямых.

Следовательно, исходное предположение неверно, т. е. отрезок PM является _____ линией треугольника ABC, что и требовалось _____

66

В треугольнике ABC стороны $AB = BC = 5$ м, $AC = 8$ м, медиана AK и биссектриса BH пересекаются в точке M. Найдите BM и AK.



Решение.

Так как $AB = BC$, то треугольник ABC — _____, а потому биссектриса BH является также его высотой и _____, следовательно, BH ___ AC и AH ___ HC = _____ м.

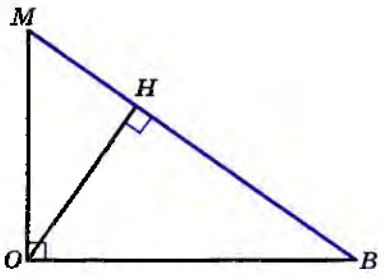
Медианы треугольника пересекаются в _____ точке и делятся ею в отношении _____ : _____, считая от вершины, т. е. BM = _____ MH и AM = _____ MK. В прямоугольном треугольнике ABH имеем: $BH^2 = AB^2 -$ _____ = _____ − _____ = _____ (м^2), откуда BH = _____ м. Поэтому MH = _____ BH = _____ м, BM = _____ м.

В треугольнике AMH имеем: AM^2 = _____ + _____ = _____ + _____ = = _____ (м^2), откуда AM = _____ м. Следовательно, $AK = \frac{3}{2}$ _____ м.

Ответ. BM = _____ м, AK = _____ м.

67

В треугольнике OBM, изображенном на рисунке, $\angle BOM = 90°$, $OH \perp BM$, $BM = 26$ дм, $BH = 18$ дм. Найдите OH и OB.



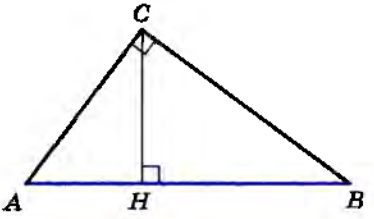
Р е ш е н и е.

Так как OH — _____ прямоугольного треугольника OBM, проведенная из вершины _____ угла, то $OB = \sqrt{BM \cdot ___} = \sqrt{___ \cdot ___} =$ $= _____$ (дм). Далее, $MH = BM -$ $- _____ = _____$ дм, поэтому $OH =$ $= \sqrt{___ \cdot ___} = \sqrt{___ \cdot ___} = ____$ (дм).

О т в е т. $OB =$ _____ дм,
$OH =$ _____ дм.

68

Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 30 м, а отношение катетов равно 3:4. Найдите отрезки, на которые гипотенуза делится высотой треугольника.



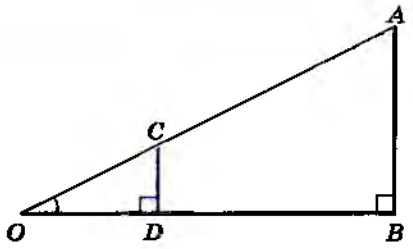
Р е ш е н и е.

Пусть $AC = 3x$, тогда $BC = 4x$ и $(3x)^2 + (_____)^2 = 30^2$. Отсюда $___ x^2 =$ $= _____$, $x^2 = _____$ и $x = _____$. Следовательно, $AC = _____$ м и $BC =$ $= _____$ м. Но $AC = \sqrt{AB \cdot ___}$, поэтому $AC^2 = _____ \cdot _____$, или $18^2 =$ $= 30 \cdot _____$, откуда $AH = _____$ м, а $BH = 30 - _____ = _____$ (м).

О т в е т. $AH =$ _____ м,
$BH =$ _____ м.

69

Длина тени столба равна 10 м, а длина тени человека, рост которого равен 1,8 м, равна 3,6 м. Найдите высоту столба.



Р е ш е н и е.

Изобразим отрезками AB и OB столб и его тень, отрезками CD и OD покажем человека и его тень. В треугольниках OCD и OAB угол O — общий, $\angle ODC = \angle$ _____ $= 90°$, следовательно, $\triangle OCD$ ___ $\triangle OAB$. Отсюда получаем, что $OD : CD = OB :$ _____, а значит, $AB = \frac{OB \cdot}{OD} =$ $=$ _____ $=$ _____ (м).

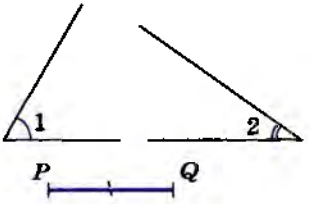
О т в е т. Высота _____ равна _____ м.

70

Постройте треугольник по двум углам и медиане, проведенной из вершины третьего угла.

Р е ш е н и е.

Пусть даны углы 1 и 2 и отрезок PQ. Требуется построить треугольник ABC, у которого $\angle A = \angle 1$, $\angle B$ ___ $\angle 2$, а медиана CM равна _____ PQ.



а)

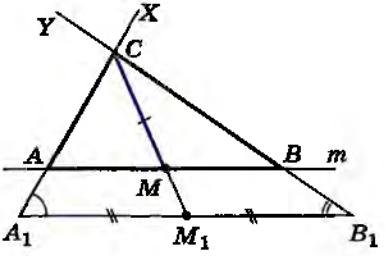
Построим сначала треугольник, подобный искомому. Для этого:

1) Проведем отрезок A_1B_1.

2) От луча A_1B_1 отложим угол B_1A_1X, равный углу 1, и от луча B_1A_1 — угол A_1B_1Y, равный углу _____, как показано на рисунке. Точку пересечения лучей A_1X и B_1Y обозначим буквой C.

3) Проведем медиану CM_1 полученного треугольника _____

4) На луче CM_1 от точки _____ отложим отрезок CM, равный данному отрезку _____



б)

5) Через точку M проведем прямую m, параллельную прямой A_1B_1. Точки пересечения прямой m и лучей CA_1 и _____ обозначим буквами A и B.

Треугольник ABC — искомый. Действительно, так как AB ___ A_1B_1, то $\angle BAC = \angle$ _____, $\angle AMC = \angle$ _____, следовательно, $\triangle AMC \sim \triangle A_1M_1C$, а потому $AM : A_1M_1 = CM :$ _____. Аналогично $\triangle BMC$ ___ $\triangle B_1M_1C$, а потому $BM :$ _____ $= CM : CM_1$. Следовательно, $AM : A_1M_1 = BM :$ _____, но $A_1M_1 =$ _____, поэтому AM ___ BM, т. е. отрезок CM — медиана треугольника _____ и она равна данному отрезку _____. Как было доказано, $\angle BAC =$ $= \angle$ _____, но $\angle$ _____ $= \angle 1$, следовательно, $\angle BAC$ ___ $\angle 1$. Аналогично $\angle ABC$ ___ $\angle 2$. Поэтому треугольник ABC удовлетворяет всем требованиям задачи.

§ 4 Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

71

Найдите синус, косинус и тангенс угла M треугольника MPT, если $\angle P = 90°$, $MP = 8$, $PT = 15$.

Решение.

Синусом острого _____ прямоугольного треугольника называется отношение _____ катета к _____. Против угла M лежит катет _____. По теореме _____ найдем гипотенузу: $MT^2 =$ $= 8^2 +$ _____ $=$ _____, откуда $MT =$ _____. Следовательно, $\sin M = \frac{PT}{__} = \frac{15}{__}$.

Косинусом острого угла _____ треугольника называется отношение _____ _____ к _____. К углу M прилежит катет _____, следовательно, $\cos M = \frac{MP}{__} = \frac{__}{17}$.

Тангенсом _____ угла прямоугольного треугольника называется _____ противолежащего катета к _____, т. е. $\operatorname{tg} M =$ _____ $=$ _____

Ответ. _____

72

Докажите, что в треугольнике BCH с прямым углом H выполняются следующие равенства:

а) $\sin B = \cos C$;

б) $\operatorname{tg} B = \dfrac{\sin B}{\cos B}$;

в) $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$.

Доказательство.

а) $\sin B = \dfrac{CH}{__}$ $\cos C = \dfrac{__}{BC}$, следовательно, $\sin B$ ___ $\cos C$;

б) $\sin B = \dfrac{CH}{__}$, $\cos B = \dfrac{__}{BC}$, $\operatorname{tg} B = \dfrac{CH}{__}$, поэтому $\dfrac{\sin B}{\cos B} = \dfrac{CH \cdot __}{____} = \operatorname{tg} B$;

в) $\sin C = \dfrac{__}{BC}$, $\cos C = \dfrac{__}{BC}$, $\sin^2 C + \cos^2 C = (____)^2 + (____)^2 =$

$= \dfrac{BH^2 + __}{BC^2} = \dfrac{__}{BC^2} = 1$.

73

Гипотенуза AC прямоугольного треугольника ACE равна 50, $\sin A = \dfrac{7}{25}$. Найдите площадь треугольника.

Решение.

Синусом острого _____ прямоугольного треугольника называется отношение _____ _____ к _____. Против угла A лежит катет _____, следовательно, $\sin A = \dfrac{__}{AC}$, откуда $CE = AC \cdot$ _____ $=$

$= 50 \cdot$ _____ $=$ _____

Второй катет _____ найдем, используя теорему _____:

$AE = \sqrt{AC^2 - ____} = \sqrt{50^2 - ____} =$ _____

Площадь прямоугольного треугольника равна _____ произведения катетов, поэтому $S_{ACE} =$ _____ $AE \cdot$ _____ $=$

$=$ _____ $=$ _____

Ответ.

_____

74

В треугольнике ABC даны $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, $AC = 9$. Найдите сторону AB.

Р е ш е н и е.

По условию задачи $\angle A =$ _____, следовательно, отрезок AC — катет, противолежащий углу _____, и требуется найти катет, прилежащий к углу _____

Отношение катета, противолежащего углу B, и катета, прилежащего к этому углу, есть _____ угла B, следовательно, $\frac{AC}{AB} =$ _____. Отсюда $AB = AC :$ _____ = _____ : $\operatorname{tg} 60° =$ = _____

О т в е т. _____

75

В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а один из острых углов равен α. Выразите катеты через c и α и найдите их длины, если:

а) $c = 12$ дм, $\alpha = 30°$;

б) $c = 16$ дм, $\alpha = 45°$.

Р е ш е н и е.

Обозначим длину катета, противолежащего углу α, буквой a и длину _____, прилежащего к углу α, буквой b.

Тогда $\sin\alpha =$ ___, $\cos\alpha =$ ___. Отсюда получаем: $a = c \cdot$ _____, $b =$ _____. Подставляя числовые данные, получим:

а) $a =$ _____ $\cdot \sin 30° =$ _____ $\cdot$ _____ = _____ (дм);
$b =$ _____ (дм).

б) $a =$ _____ (дм);
$b =$ _____ (дм).

О т в е т.

а) _____

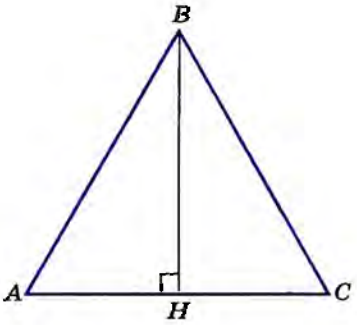
б) _____

76

Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной a.

Р е ш е н и е.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot$ _____, где отрезок BH — _____ треугольника. В прямоугольном треугольнике ABH гипотенуза AB равна _____, $\angle A =$ $=$ _____, BH — _____, противолежащий углу A. Следовательно, $\sin A = \frac{BH}{____}$, откуда $BH =$ _____ $\times$ $\times \sin A =$ _____ $\cdot \sin 60° =$ _____ $\cdot$ _____ $=$ $=$ _____



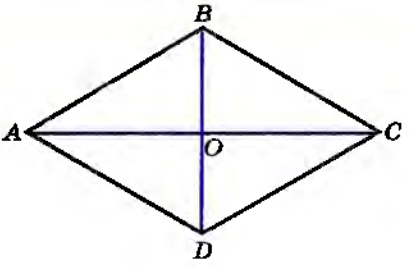
Итак, $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot$ _____ $=$ _____ a^2.

О т в е т.

_____

77

Найдите углы ромба $ABCD$, если его диагонали AC и BD равны $4\sqrt{3}$ м и 4 м.



Р е ш е н и е.

Пусть $\angle BAO = \alpha$. Диагонали ромба делят его углы _____, значит, $\angle DAO = \angle$ _____ $= \alpha$.

Диагонали ромба взаимно _____ и точкой пересечения делятся _____, следовательно, в прямоугольном треугольнике ABO катет AO равен _____ м, а катет _____ равен _____ м. Поэтому $\operatorname{tg} \alpha =$ _____ $=$ _____, откуда $\alpha =$ _____, а $\angle BAD = 2 \cdot$ _____ $=$ _____, $\angle ADC = \angle$ _____ $=$ _____

О т в е т.

_____

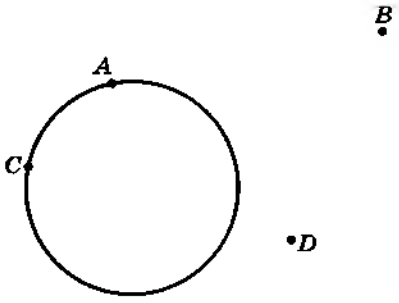
Глава VIII

Окружность

§ 1 Касательная к окружности

78

Проведите прямые через каждые две точки. Сколько общих точек имеет каждая из прямых с окружностью?



О т в е т.

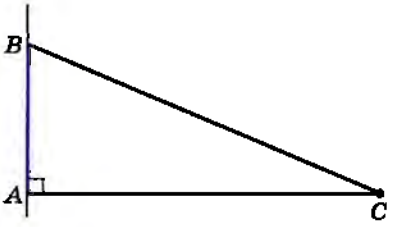
Прямая _____ и окружность не имеют общих точек.

Прямая _____ и окружность имеют только одну _____ точку.

Прямые _____, _____, _____, _____ и окружность имеют две общие точки.

79

В треугольнике ABC, изображенном на рисунке, $\angle A = 90°$, $AB = 5$ см, $BC = 13$ см. Найдите радиус окружности с центром C, если она имеет с прямой AB только одну общую точку.



Р е ш е н и е.

По условию задачи окружность и прямая _____ имеют только _____ общую точку.

Если бы радиус окружности был меньше расстояния от _____ окружности — точки ____ — до прямой AB, то окружность и прямая имели бы _____ общие точки.

Если бы радиус _____ был больше расстояния от точки ____ до _____ AB, то окружность и прямая _____ общих точек.

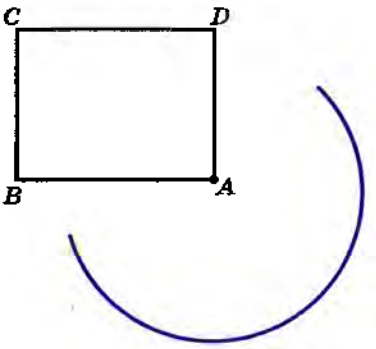
Следовательно, радиус R окружности _____ расстоянию от точки C до _____ AB, т. е. равен катету _____

Итак, $R = AC = \sqrt{____ - ____} = \sqrt{____} = ____$ (см).

Ответ. Радиус окружности равен _____ см.

80

Дан прямоугольник $ABCD$, где $AB = 8$ см, $AD = 6$ см. Какие из прямых AC, BC, CD и BD являются секущими по отношению к окружности с центром A радиуса 6 см?



Решение.

Прямая AC проходит через центр _____ — точку A, следовательно, прямая AC является _____ по отношению к окружности с _____ A.

Так как $\angle B = 90°$, то AB ___ BC, поэтому расстояние от точки A до _____ BC равно _____ см, т. е. больше _____ окружности. Следовательно, прямая BC _____ секущей по отношению к данной окружности.

Так как $\angle D = 90°$, то AD ___ CD, поэтому расстояние от _____ A до _____ CD равно _____ см, т. е. _____ радиусу окружности. Следовательно, прямая CD _____ _____ по отношению к данной окружности.

Чтобы найти расстояние от точки A до _____ BD, проведем из точки ___ перпендикуляр AH к прямой BD и вычислим его _____. Находя двумя способами площадь треугольника ABD, получим: $\frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} BD \cdot$ _____. По теореме Пифагора $BD = \sqrt{____ + ____} = ____$ см. Поэтому $AH =$ _____ см.

Итак, расстояние от точки A до прямой BD _____ радиуса окружности, следовательно, прямая BD _____ секущей по отношению к данной _____

Ответ. Секущими являются прямые _____ и _____

81

Какая из прямых AC, BC, CD и BD из предыдущей задачи является касательной к окружности с центром A радиуса 6 см?

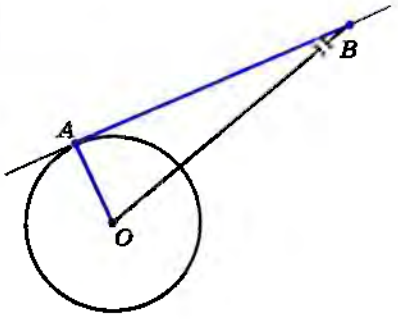
Р е ш е н и е.

Касательной к _____ называется _____, имеющая с окружностью только _____ точку. Прямая и окружность имеют только одну _____ точку, если расстояние от центра _____ до прямой равно _____ окружности. Это условие выполняется для прямой _____, значит, касательной к данной _____ является прямая _____

О т в е т. Касательной является прямая _____

82

Прямая AB — касательная в точке A к окружности с центром O. Найдите длину отрезка OB, если $AB = 24$ дм, а радиус окружности равен 7 дм.



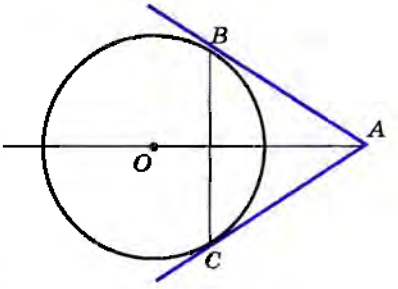
Р е ш е н и е.

По условию задачи прямая AB является _____ к данной окружности, следовательно, прямая AB _____ к радиусу OA, проведенному в _____ касания. Поэтому треугольник AOB — _____. По теореме Пифагора $OB^2 = OA^2 +$ _____, отсюда $OB =$ _____ дм.

О т в е т. $OB =$ _____ дм.

83

Прямые AB и AC касаются окружности с центром O в точках B и C. Найдите угол BAO, если $AB = BC$.



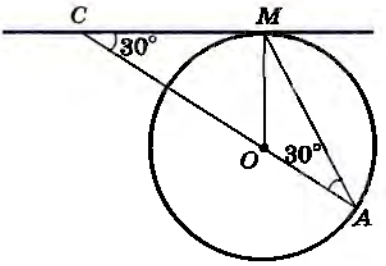
Р е ш е н и е.

Так как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, _____, то $AB =$ _____, следовательно, треугольник ABC — _____, поэтому $\angle BAC =$ _____

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной _____, составляют _____ углы с прямой, проходящей через эту точку и _____ окружности, следовательно, $\angle BAO = \angle$ _____ $= \frac{1}{2} \angle$ _____ = _____

Ответ. $\angle BAO =$ _____

84



Прямая AC проходит через центр O окружности, $\angle MAO = \angle OCM = 30°$. Докажите, что прямая CM является касательной к данной окружности.

Доказательство.

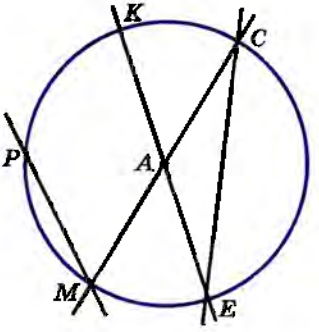
Так как в треугольнике AOM $AO =$ = _____, то $\angle AMO = \angle$ _____ = _____. В треугольнике AMC $\angle AMC = 180° - (\angle MAC + \angle$ _____$) = 180° -$ $- ($_____ + _____$) =$ _____. Поэтому $\angle OMC = \angle AMC - \angle$ _____ = $= 120° -$ _____ = _____, т. е. CM ___ OM.

Итак, прямая CM проходит через конец радиуса _____, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу. Поэтому она является _____ к данной окружности, что и требовалось _____

§ 2 Центральные и вписанные углы

85

Какие углы являются центральными углами окружности с центром A?

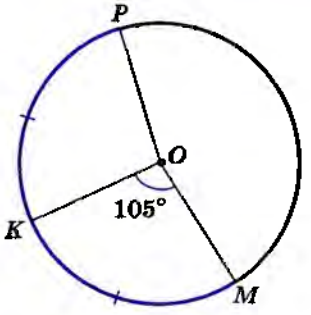


Решение.

Центральным _____ окружности называется угол с вершиной в _____. На рисунке центр окружности — точка ____ служит вершиной углов MAE, _____, _____, _____, _____, _____. Эти углы являются центральными углами данной _____

Ответ. _____

86



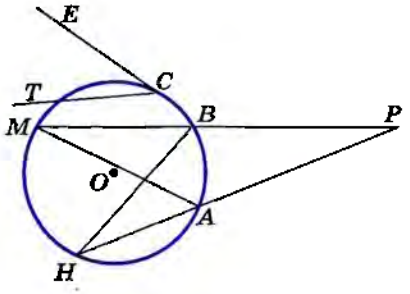
Точка O — центр окружности, $\angle MOK = 105°$, $\smile PK = \smile MK$. Найдите градусную меру угла MOP.

Р е ш е н и е.

Угол MOK является _____ _____ углом окружности, а дуга MK меньше полуокружности, поэтому $\smile MK = \angle$ _____ = _____. По условию задачи $\smile PK = \smile$ _____, и, значит, градусная мера дуги PK равна _____. $\smile MKP = \smile MK +$ _____ = = _____ $> 180°$, т. е. дуга MKP больше полуокружности, поэтому $\smile MKP =$ _____ $- \angle MOP$, поэтому $\angle MOP =$ _____ $- \smile MKP =$ = _____ – _____ = _____

О т в е т. $\angle MOP =$ _____

87



Какие из углов HAM, HBM, TCE и HPM являются вписанными?

Р е ш е н и е.

Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на _____ _____, а стороны _____ окружность.

Точка A лежит на окружности, а стороны угла HAM _____ окружность. Следовательно, угол _____ _____ вписанным.

Точка B лежит на _____, а стороны угла HBM пересекают _____, следовательно, угол HBM _____

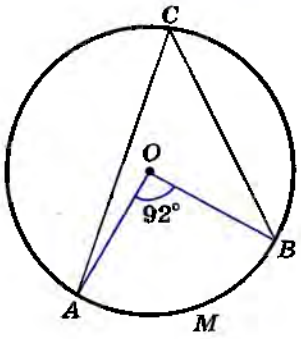
Точка C _____, а сторона CE угла TCE не пересекает _____, следовательно, угол TCE _____ вписанным.

Точка P _____ на окружности, следовательно, угол HPM _____ вписанным.

О т в е т. Вписанными являются углы _____ и _____

88

На рисунке точка O — центр окружности, $\angle AOB = 92°$. Найдите $\angle ACB$.



Р е ш е н и е.

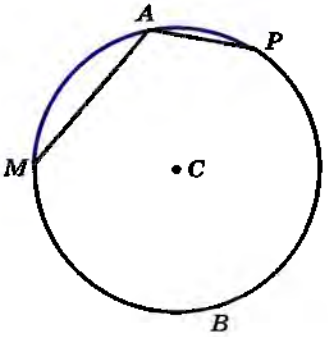
Угол AOB является _____ углом данной окружности и равен _____, следовательно, $\smile AMB =$ _____

Угол ACB является _____ и опирается на дугу _____, поэтому $\angle ACB = \frac{1}{2}$ _____ = _____

О т в е т. $\angle ACB =$ _____

89

На рисунке $\smile MAP = 120°$. Найдите $\angle MAP$.



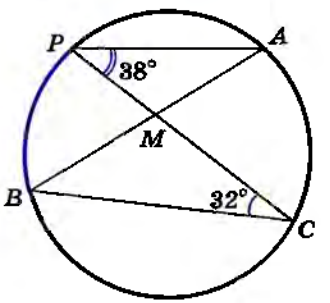
Р е ш е н и е.

Угол MAP является _____ углом окружности и опирается на дугу _____. $\smile MBP = 360° - \smile$_____ = $= 360° -$ _____ = _____, $\angle MAP =$ $= \frac{1}{2}$ _____ = _____

О т в е т. $\angle MAP =$ _____

90

На рисунке $\angle APM = 38°$, $\angle BCM = 32°$. Найдите $\angle AMP$.



Р е ш е н и е.

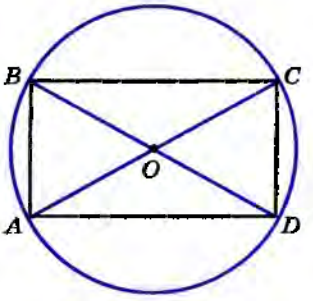
Вписанные углы PAB и BCP _____ _____ на одну и ту же _____ BP, следовательно, $\angle PAB = \angle$ _____ = _____

Из треугольника AMP получим: $\angle AMP = 180° - (\angle$ _____ $+ \angle$ _____$) =$ $= 180° - ($_____ + _____$) =$ _____

О т в е т. $\angle AMP =$ _____

91

Дана окружность с диаметрами AC и BD. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.



Доказательство.

Отрезок AC — _____ окружности, следовательно, дуга ADC — полуокружность. Вписанный угол ABC опирается на _____ _____, поэтому он _____

Аналогично углы ADC, _____ и _____ прямые. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ является _____

92

Точки A, B, C лежат на одной окружности, $\angle ABC = 80°$. Лежит ли центр окружности на отрезке AC?

Решение.

Если центр окружности лежит на отрезке AC, то отрезок AC является _____ этой окружности, а дуга AC является _____. Тогда вписанный угол ABC опирается на полуокружность, а потому он равен _____, но по условию задачи $\angle ABC =$ _____. Следовательно, центр окружности _____ на отрезке AC.

Ответ. _____

93

Хорды KM и PT пересекаются в точке C, $KC = 7$ см, $CM = 4$ см, $PT = 16$ см. Найдите отрезки PC и CT.

Решение.

Хорды KM и PT пересекаются, следовательно, произведение _____ хорды KM равно _____ отрезков хорды _____, т. е. $PC \cdot$ _____ $= KC \cdot$ _____. Обозначим длину отрезка PC буквой x, тогда $CT =$ _____, следовательно, $x \cdot$ (_____) $= 7 \cdot$ _____. Корни полученного квадратного уравнения $x^2 -$ ____ $x +$ ____ $= 0$ равны ____ и ____. Итак, либо $PC =$ ____, и тогда $CT =$ ____, либо $PC =$ ____, и тогда $CT =$ ____

Ответ. $PC =$ ___ см, $CT =$ ____ см или $PC =$ ____ см, $CT =$ ___ см.

94

Точки A, B и C лежат на одной окружности. Отрезки AB и CH пересекаются в точке M. Лежит ли точка H на данной окружности, если $AM = 5$ м, $MB = 6$ м, $CM = 8$ м, $MH = 4$ м?

Р е ш е н и е.

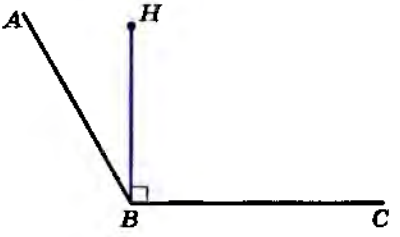
Если точка H лежит на данной окружности, то отрезки AB и CH являются хордами этой _____, пересекающимися в точке ____. Поэтому должно быть верным равенство $AM \cdot$ ____ $=$ $= MH \cdot$ _____. Но так как $5 \cdot 6$ ____ $8 \cdot 4$, то точка H _____ _____ на данной окружности.

О т в е т. _____

§ 3 Четыре замечательные точки треугольника

95

На рисунке $\angle ABC = 120°$, $HB \perp BC$, $BH = 4$ см. Вычислите расстояние от точки H до стороны BA угла ABC.



Р е ш е н и е.

Проведем из точки ____ перпендикуляр HM к прямой BA, тогда расстояние от точки H до прямой ____ равно длине отрезка ____. По условию задачи $\angle ABC =$ ____, HB __ BC, т. е. $\angle$ _____ $= 90°$. Значит, $\angle ABH = 120° -$ _____ $=$ _____

В треугольнике HBM $\angle MBH =$ _____, $\angle HMB =$ _____, следовательно, $HM = \frac{1}{2}$ _____ $=$ _____ $\cdot 4 =$ _____ (см), т. е. расстояние от точки ____ до прямой _____ равно ____ см.

О т в е т. _____

96

Луч ME является биссектрисой угла TMP. Верно ли, что:

а) точка A равноудалена от сторон угла TMP;

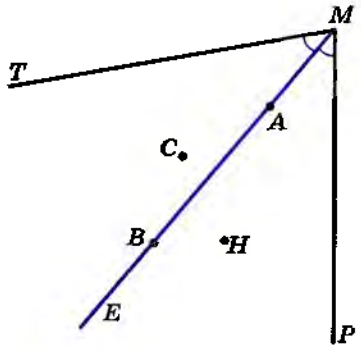
б) точка B не равноудалена от сторон угла TMP;

в) точка H равноудалена от сторон угла TMP;

г) точка C не равноудалена от сторон угла TMP?

Р е ш е н и е.

а) Точка A лежит на биссектрисе ME угла _____, поэтому она _____ _____ от сторон этого угла. Следовательно, данное утверждение о точке A _____



б) Точка B лежит на _____ _____ ME угла TMP, поэтому она _____ от _____ этого угла. Следовательно, данное утверждение о точке B _____

в) Если бы точка H была равноудалена от _____ угла TMP, то она лежала бы на _____ этого угла. Но точка H _____ на биссектрисе угла _____. Следовательно, данное утверждение о точке H _____

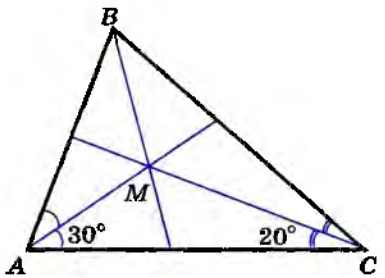
г) Если бы точка C была равноудалена от _____ _____, то она _____ на биссектрисе этого _____. Следовательно, данное утверждение о точке C _____

97

Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle ABM$, если $\angle MAC = 30°$, $\angle MCA = 20°$.

Р е ш е н и е.

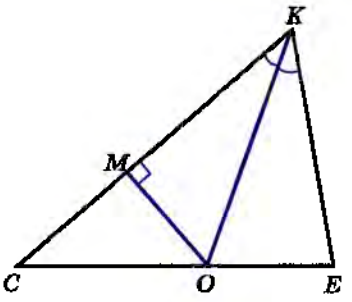
Биссектрисы треугольника пересекаются в _____ точке, следовательно, луч BM — _____ _____ угла ABC, т. е. $\angle ABM = \frac{1}{2}\angle$ _____. По условию задачи лучи AM и CM _____ _____ углов A и ____, поэтому $\angle A = 2 \cdot$ _____ = _____, $\angle C = 2 \cdot$ _____ = = _____. Следовательно, $\angle B = 180° -$ $-(\angle$ _____ $+\angle$ _____$) = 180° - ($_____ $+$ $+$ _____$) =$ _____, значит, $\angle ABM =$ $= \frac{1}{2}\angle$ _____ = _____



О т в е т. $\angle ABM =$ _____

98

На рисунке даны $\angle OKC = \angle EKO$, $OM \perp KC$, $OM = 7$ см. Найдите расстояние от точки O до прямой KE.



Р е ш е н и е.

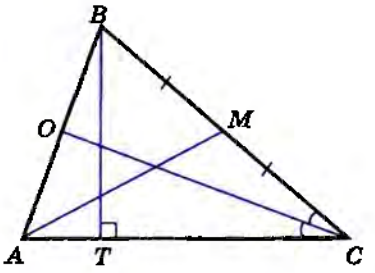
По условию задачи луч KO является _____ угла _____, поэтому точка O _____ от сторон этого угла, т. е. от прямых _____ и _____

Расстоянием от точки O до прямой CK является длина _____ OM, проведенного из точки _____ к этой прямой, т. е. расстояние от точки _____ до _____ CK равно _____ см. Поэтому расстояние от _____ O до _____ KE равно _____ см.

О т в е т. _____

99

В треугольнике ABC, изображенном на рисунке, $AC = BC \neq AB$, $BM = MC$, $BT \perp AC$, $\angle ACO = \angle BCO$. Какая из прямых AM, CO, BT является серединным перпендикуляром к стороне треугольника ABC?



Р е ш е н и е.

Прямая называется серединным перпендикуляром к отрезку, если она проходит через _____ этого отрезка и _____ к нему.

По условию задачи $BM =$ _____, но прямая AM не перпендикулярна к _____ BC, так как в противном случае отрезок AM был бы медианой и _____ треугольника ABC, а тогда были бы равны стороны AB и _____, что неверно. Следовательно, прямая AM _____ серединным _____ к стороне BC.

По условию задачи $BT \perp$ ____, но AT ___ CT, так как в противном случае отрезок BT был бы высотой и _____ треугольника ABC, а тогда были бы _____ стороны AB и BC, что неверно. Следовательно, прямая BT _____ серединным _____ к стороне AC.

По условию задачи $\angle ACO = \angle$ _____ и $AC =$ _____, т. е. отрезок CO является _____ равнобедренного треугольника, а потому он является также его медианой и _____. Следовательно, прямая CO проходит через _____ отрезка AB и _____ к этому отрезку, т. е. _____ серединным _____ к стороне _____

Ответ.

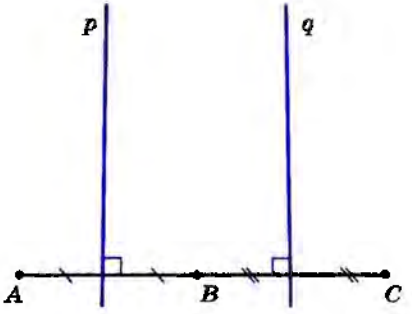
Серединным _____ к стороне треугольника ABC является прямая _____

100

Точки A, B и C не лежат на одной прямой; прямые p и q — серединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC. Докажите, что прямые p и q пересекаются.

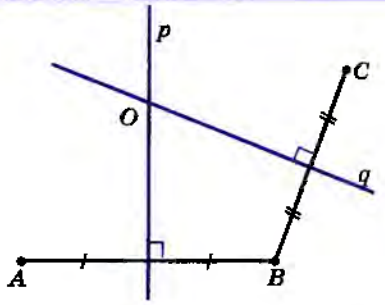
Доказательство.

Предположим, что прямые p и q не пересекаются. По условию задачи p ___ AB, а из предположения следует, что $p \parallel q$, значит, по свойству параллельных прямых AB ___ q. Итак, через точку B проходят _____ прямые AB и _____, перпендикулярные к прямой q, что невозможно.



Следовательно, наше предположение неверно, а значит, серединные _____ к отрезкам AB и BC _____

101

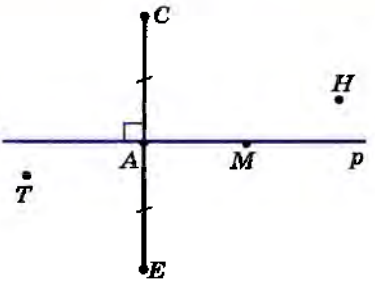


Прямые p и q — серединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC. Докажите, что $AO = OC$.

Доказательство.

Так как прямая p — _____ _____ перпендикуляр к _____ AB, то AO = _____. Аналогично, так как прямая q — серединный _____ к отрезку BC, то OB = _____. Итак, $AO = OB$ = _____, поэтому AO = _____, что и требовалось доказать.

102



Прямая p — серединный перпендикуляр к отрезку CE. Верно ли, что: а) точка A равноудалена от концов отрезка CE; б) расстояния от точки M до точек C и E не равны; в) точка H равноудалена от точек C и E; г) точка T удалена на разные расстояния от концов отрезка CE?

Решение.

а) Точка A лежит на _____ перпендикуляре к отрезку CE, следовательно, она _____ от концов этого отрезка, т. е. данное утверждение о точке A _____

б) Точка M лежит на серединном _____ к отрезку _____, поэтому она _____ от концов отрезка CE, а значит, расстояния от нее до точек C и _____ _____, т. е. данное утверждение о точке M _____

в) Если бы точка H была равноудалена от точек C и E, то она лежала бы на серединном _____ к отрезку _____, но это не так, и поэтому данное утверждение о точке H _____

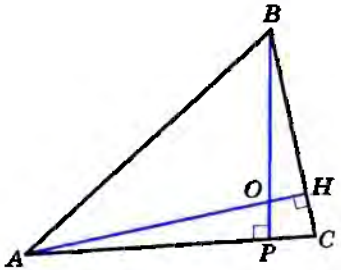
г) Если бы точка T была удалена на равные расстояния от точек C и E, то она лежала бы на серединном _____ к отрезку _____, что в данном случае не выполняется. Следовательно, данное утверждение о точке T _____

103

Отрезки AH и BP — высоты треугольника ABC. Проведите с помощью одной линейки (без делений) высоту из вершины C.

Р е ш е н и е.

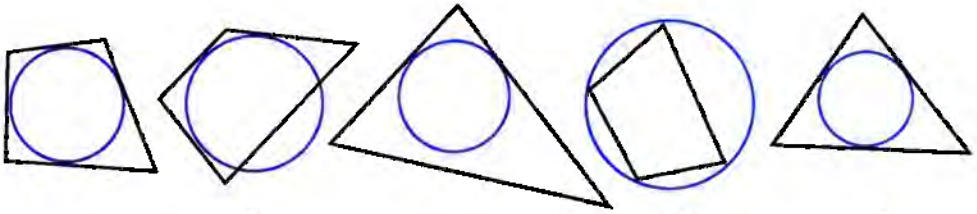
Высоты треугольника пересекаются в _____ точке, поэтому третья высота треугольника проходит через точку ___. С помощью линейки проведем прямую _____ и обозначим буквой T точку пересечения этой прямой с прямой AB. Отрезок _____ — искомая _____ треугольника ABC.



§ 4 Вписанная и описанная окружности

104

На каких рисунках $а$ — $д$ изображены многоугольник и вписанная в него окружность?



а) б) в) г) д)

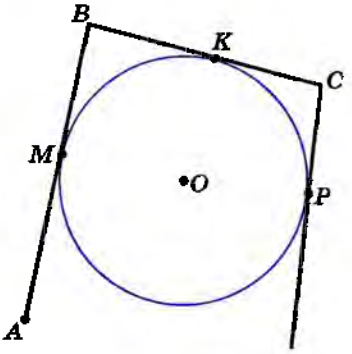
Р е ш е н и е.

Окружность называется вписанной в _____, если _____ стороны многоугольника _____ окружности. Все _____ многоугольника касаются окружности на рисунках ___ и ___, следовательно, многоугольник и _____ в него окружность изображены на рисунках ___ и ___

О т в е т. ___ и ___

105

Достройте четырехугольник $ABCD$ так, чтобы он был описан около данной окружности.

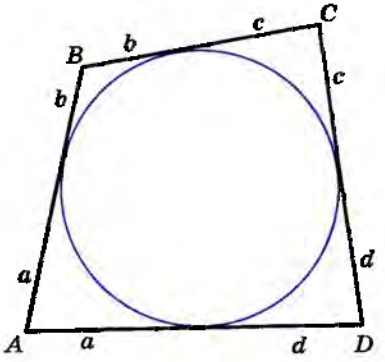


Р е ш е н и е.

Многоугольник описан около окружности, если _____ его стороны касаются _____. Проведем через точку A _____ к данной окружности, отличную от AM, и обозначим буквой D _____ пересечения этой касательной и прямой CP. Четырехугольник _____ — искомый.

106

Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Докажите, что $AB + CD = BC + AD$.

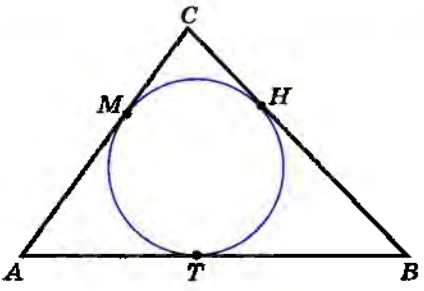


Д о к а з а т е л ь с т в о.

Используя свойство отрезков касательных к _____, проведенных из одной точки, получаем: $AB + CD = a + b +$ ___ + ___, $BC +$ $+ AD =$ _____. Следовательно, $AB +$ _____ $= BC +$ _____, что и требовалось _____

107

Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках H, M и T. Найдите периметр треугольника ABC, если $AM = 5$ м, $CH = 3$ м, $BT = 6$ м.



Р е ш е н и е.

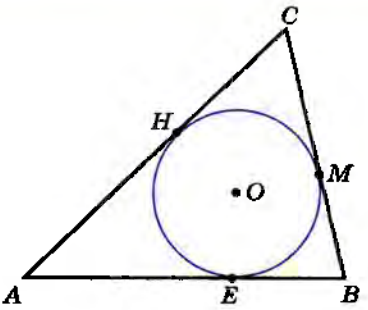
Отрезки касательных к _____ _____, проведенные из

одной _____, равны. Поэтому AT = _____ = 5 м, CM = _____ = = _____ м, BH = _____ = _____ м. Следовательно, $P_{ABC} = AM + MC + CH +$ _____ = $2 \cdot (AM +$ _____) = = ___ · (5 + _____) = _____ (м).

Ответ. P_{ABC} = _____ м.

108

Найдите площадь треугольника ABC, если его периметр равен 60 см, а радиус r вписанной окружности равен 4 см.



Решение.

Соединим центр окружности с вершинами треугольника и точками H, M и E касания сторон треугольника и окружности. Так как радиус, проведенный в точку _____, перпендикулярен к касательной, то $OH \perp$ _____, следовательно, отрезок OH — _____ треугольника AOC. Аналогично отрезок OM — высота _____ BOC, отрезок OE — _____ треугольника _____. Поэтому $S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot$ _____. Аналогично $S_{BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot$ _____ и $S_{AOC} = \frac{1}{2} AC \cdot$ _____

Итак, $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} +$ _____ $= \frac{1}{2}$ $(AB \cdot OE + BC \cdot$ _____ + + _____) = ___ $(AB \cdot r + BC \cdot r +$ _____) = ___ $(AB +$ _____ $+ AC)r$ = = ___ $P_{ABC} \cdot$ _____ = $\frac{1}{2}$ _____ = _____ (см^2).

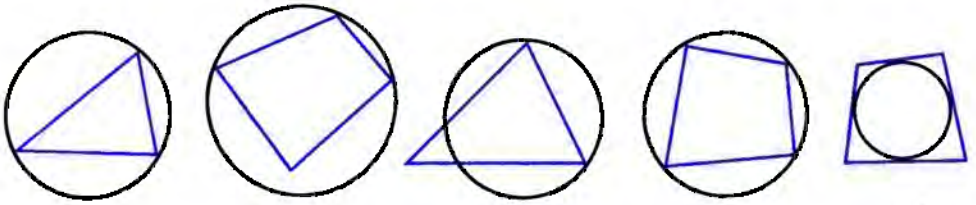
Ответ. _____

109

На каких рисунках *а* — *д* изображены многоугольник и описанная около него окружность?

Решение.

Окружность называется _____ около многоугольника, если _____ вершины многоугольника _____ на окружности.

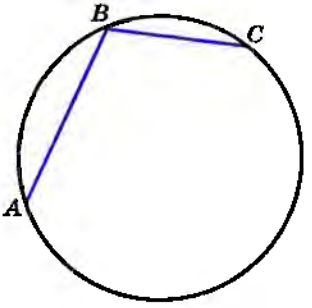


Все вершины многоугольника _____ на окружности на рисунках ___ и ___, следовательно, многоугольник и описанная _____ него окружность изображены на рисунках ___ и ___

Ответ. _____

110

Достройте четырехугольник $ABCD$ так, чтобы он был вписан в окружность.



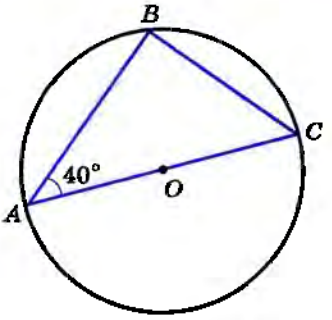
Решение.

Многоугольник вписан в окружность, если _____ его вершины лежат на _____

Отметим на дуге AC точку D и проведем отрезки AD и _____. Четырехугольник _____ искомый.

111

В треугольнике ABC $\angle A = 40°$. Найдите остальные углы треугольника, если центр описанной около него окружности лежит на стороне AC.



Решение.

Так как точки A, B и ___ лежат на данной _____, а ее центр — точка O — лежит на отрезке _____, то отрезок AC — _____ данной окружности, а угол B является _____ в эту окружность и опирается на ее _____. Поэтому $\angle B =$ _____, а $\angle C = 180° - (40° +$ _____$) =$ _____

Ответ. $\angle B =$ _____, $\angle C =$ _____

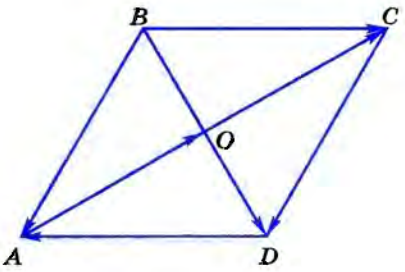
Глава IX

Векторы

§ 1 Понятие вектора

112

На рисунке изображен ромб $ABCD$, где $AB = 4$, $\angle BAD = 60°$.



а) Началом каких ненулевых векторов служит точка B?

б) Концом каких данных ненулевых векторов служит точка A?

в) Как называется и обозначается вектор с началом и концом в точке C?

г) Найдите длины (модули) векторов $\vec{BC}$ и $\vec{BD}$.

д) Какой ненулевой вектор коллинеарен вектору $\vec{BA}$?

е) Какие данные ненулевые векторы сонаправлены и какие противоположно направлены?

ж) Равны ли векторы $\vec{BA}$ и $\vec{CD}$, $\vec{BC}$ и $\vec{DA}$, $\vec{BA}$ и $\vec{BD}$, $\vec{AO}$ и $\vec{AC}$, $\vec{AC}$ и $\vec{BC}$, $\vec{AO}$ и $\vec{OC}$?

з) Какой вектор, равный вектору $\vec{CD}$, отложен от точки B?

О т в е т. а) $\vec{BA}$, _____, _____; б) _____

в) вектор с началом и концом в _____ C называется _____ и обозначается _____ или _____

г) $|\vec{BC}|$ = _____, _____

д) вектору $\vec{BA}$ _____ вектор _____

е) сонаправлены ненулевые векторы _____ и _____, _____ и _____, противоположно _____ векторы _____ и _____

ж) $\vec{BA}$ ___ $\vec{CD}$, так как $|\vec{BA}|$ ___ $|\vec{CD}|$ и $\vec{BA}$ ↑↑ ___; $\vec{BC}$ ___ $\vec{DA}$, так как $\vec{BC}$ и _____ не сонаправлены; $\vec{BA}$ ___ $\vec{BD}$, так как $\vec{BA}$ и $\vec{BD}$ _____; $\vec{AO}$ ___ $\vec{AC}$, так как $|\vec{AO}|$ ___ $|\vec{AC}|$; _____

_____

з) _____

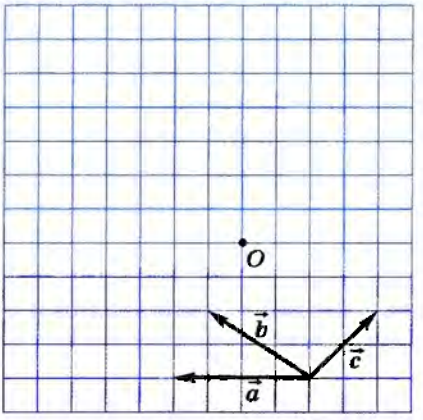
113

а) Постройте ненулевой вектор с началом в точке O:

коллинеарный вектору $\vec{a}$;

сонаправленный с вектором $\vec{b}$;

противоположно направленный вектору $\vec{c}$.



б) Отложите от точки O вектор, равный вектору $\vec{c}$.

в) Сколько векторов, равных вектору $\vec{c}$, можно отложить от точки O?

Ответ. в) От точки O можно отложить только _____ вектор, равный вектору $\vec{c}$.

114

Стороны прямоугольника $ABCD$ равны 3 дм и 4 дм. Найдите длину вектора $\vec{AC}$.

Решение.

Длина вектора $\vec{AC}$ — это длина _____ AC. Отрезок AC является _____ прямоугольника $ABCD$, следовательно, $AC = \sqrt{3^2 + ____} = ____$ (дм), т. е. $|\vec{AC}| = ____$ дм.

Ответ. _____

§ 2 Сложение и вычитание векторов

115

Используя правило треугольника, найдите сумму векторов:

а) $\vec{PM}$ и $\vec{MT}$; б) $\vec{CH}$ и $\vec{HC}$; в) $\vec{AB} + \vec{0}$; г) $\vec{0} + \vec{CE}$.

Решение.

а) $\vec{PM} + \vec{MT} =$ _____

б) $\vec{CH} + \vec{HC} =$ _____ $=$ _____

в) $\vec{AB} + \vec{0} =$ _____ $+ \vec{BB} =$ _____

г) $\vec{0} + \vec{CE} =$ _____ $+ \vec{CE} =$ _____

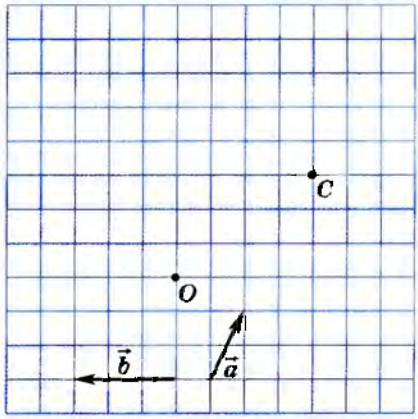
Ответ. а) _____; б) _____; в) _____; г) _____

116

Используя правило треугольника, постройте векторы $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. Определите вид четырехугольника $OABC$.

Р е ш е н и е.

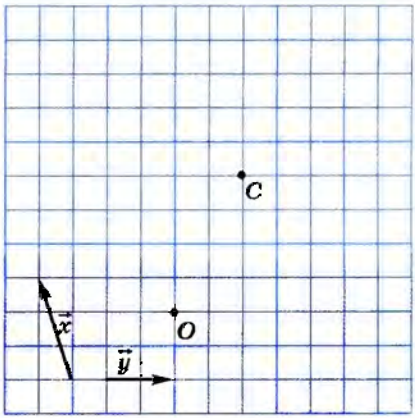
Отложим от точки O вектор $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a}$ и от точки M вектор $\overrightarrow{MA} =$ $=$ _____, тогда $\overrightarrow{OA} =$ _____ + _____. Аналогично строим $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{b}$, тогда $\overrightarrow{CB} =$ _____. Так как $\overrightarrow{OA} =$ _____ + _____ и $\overrightarrow{CB} =$ $=$ _____ + _____, то $\overrightarrow{OA}$ ___ $\overrightarrow{CB}$, следовательно, $OA \parallel$ _____ и $OA =$ _____, поэтому четырехугольник $OABC$ — _____



О т в е т. Четырехугольник $OABC$ — _____

117

Используя правило параллелограмма, постройте векторы $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ и $\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$. Докажите, что $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{PT}$.



Р е ш е н и е.

Отложим от точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{y}$. Построим точку P так, чтобы четырехугольник $OAPB$ был _____, тогда по правилу параллелограмма $\overrightarrow{OP} =$ _____ + _____. Отложим от точки C векторы $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{y}$ и $\overrightarrow{CE} =$ _____. Построим _____ $CMTE$, тогда по правилу _____ $\overrightarrow{CT} =$ _____ + _____

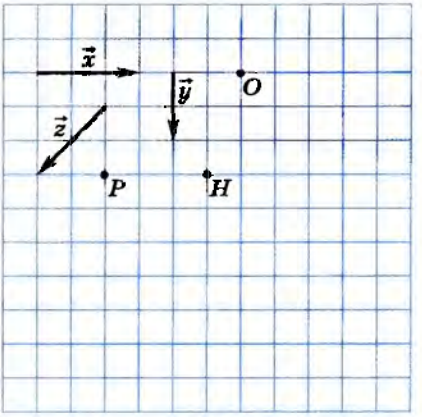
Так как $\overrightarrow{OP} =$ _____ + _____, $\overrightarrow{CT} =$ _____ + _____ и $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} =$ $=$ _____ + _____ (переместительный закон _____ векторов), то $\overrightarrow{OP}$ ___ $\overrightarrow{CT}$. Следовательно, четырехугольник $OPTC$ — _____, а потому $\overrightarrow{OC}$ = _____, что и требовалось доказать.

118

а) Постройте векторы $\overrightarrow{OT} = \vec{x} + \vec{y}$ и $\overrightarrow{PM} = \vec{y} + \vec{z}$.

б) Отложите от точки H векторы $\vec{m} = \overrightarrow{OT} + \vec{z}$ и $\vec{n} = \vec{x} + \overrightarrow{PM}$.

в) Докажите, что $\vec{m} = \vec{n}$.



Доказательство.

Так как $\overrightarrow{OT} = \vec{x} +$ ___, то $\vec{m} = \overrightarrow{OT} +$ $+ \vec{z} =$ (___ $+ \vec{y}) + \vec{z}$. Так как $\overrightarrow{PM} = \vec{y} +$ $+$ ___, то $\vec{n} =$ ___ $+ \overrightarrow{PM} = \vec{x} +$ (___ $+ \vec{z}$).

В соответствии с сочетательным _____ сложения векторов выполняется равенство:

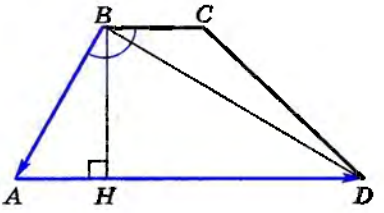
$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} =$ ___ + (___ + ___),

а значит, $\vec{m}$ ___ $\vec{n}$, что и требовалось _____

119

В трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 120°$, $AD =$ $= 6$ см, $AB = 3$ см.

Найдите $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}|$.



Решение.

По правилу треугольника имеем: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} =$ _____, следовательно, $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}| = |$_____$|$. Длина вектора $\overrightarrow{BD}$ — это _____ отрезка _____. Так как $AD \parallel$ _____, то $\angle BAD = 180° -$ $- \angle$ _____ = _____

Проведем высоту BH трапеции. В прямоугольном треугольнике ABH имеем: $BH = AB \cdot \sin$___ $= 3 \cdot$ _____ = _____ (см), $AH =$ ___ $\cdot \cos$___ $=$ ___ $\cdot$ _____ $=$ _____ (см).

Из треугольника BHD по теореме Пифагора получаем: $BD^2 =$ _____ $+ (AD -$ _____$)^2 =$ _____ $+$ _____ $=$ _____ (см^2), откуда $BD =$ _____ см.

Ответ. _____

120

Пользуясь правилами и законами сложения векторов, упростите выражение $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CT}$.

Решение.

$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CT} =$

$= (\overrightarrow{MC} + _____) + \overrightarrow{CT} =$

$= (\overrightarrow{AM} + _____) + \overrightarrow{CT} =$

$= _____ + \overrightarrow{CT} = _____$

Ответ. _____

Обоснование.

_____ закон

_____ закон

_____ треугольника

правило _____

121

Пользуясь правилом многоугольника и законами сложения векторов, упростите выражение $\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{KM}$.

Решение.

$\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} + _____ = _____ + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} + _____ =$

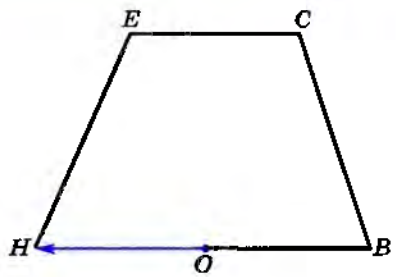
$= \overrightarrow{BK} + _____ + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} = _____ + \overrightarrow{MT} + _____ = _____ + \overrightarrow{TP} =$

$= _____$

Ответ. _____

122

В трапеции $BCEH$, изображенной на рисунке, $BH = 2CE$, точка O — середина BH. Какие векторы с концом и началом в отмеченных точках являются противоположными вектору $\overrightarrow{OH}$?



Решение.

По определению противоположным вектору $\overrightarrow{OH}$ является вектор, направление которого _____ направлению вектора _____, а длина _____ длине вектора $\overrightarrow{OH}$.

Противоположно направлены вектору $\overrightarrow{OH}$ векторы $\overrightarrow{HB}$, _____, _____, _____. Из них имеют длину, равную _____ вектора $\overrightarrow{OH}$, векторы _____, _____, _____

Итак, _____ вектору $\overrightarrow{OH}$ являются векторы _____, _____, _____

Ответ. _____

123

Какой из векторов $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PC}$ равен разности векторов $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MP}$?

Р е ш е н и е.

По определению разностью векторов $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MP}$ является вектор $\overrightarrow{x}$, такой, что _____ $+ \overrightarrow{x} =$ _____

Проверим, какой из данных векторов удовлетворяет этому условию:

$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{CM}$ ___ $\overrightarrow{MC}$, следовательно, $\overrightarrow{CM} \neq \overrightarrow{MC}$ – _____

$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{CP}$ ___ $\overrightarrow{MC}$, следовательно, $\overrightarrow{CP}$ ___ $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$.

$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM}$ _____, т. е. $\overrightarrow{PM}$ ___ $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$.

$\overrightarrow{MP} +$ _____, т. е. $\overrightarrow{PC}$ ___ $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$.

О т в е т. _____

124

Докажите, что для любых трех точек X, Y, Z верно равенство $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

По теореме о разности векторов $a - b = a +$ (_____), поэтому $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} =$ _____ + (_____). Запись «$-\overrightarrow{ZY}$» означает «вектор, противоположный вектору _____», т. е. $-\overrightarrow{ZY} =$ _____. Следовательно, $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} =$ _____ + $(-\overrightarrow{ZY}) = \overrightarrow{XY} +$ _____, что и требовалось _____

125

Упростите выражение $(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{TA}) - (\overrightarrow{PX} - \overrightarrow{TX})$.

Р е ш е н и е.

$(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{TA}) - (\overrightarrow{PX} -$ _____$) =$ (_____ $- \overrightarrow{TA}) -$

$- (\overrightarrow{PX} + (-$ _____$)) = (\overrightarrow{HA} + (-$ _____$)) - (\overrightarrow{PX} +$ _____$) =$

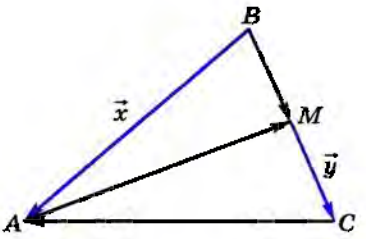
$= (\overrightarrow{HA} +$ _____$) -$ _____ $=$ _____ $+ (-$ _____$) =$

$= \overrightarrow{HT} +$ _____ $=$ _____

О т в е т. _____

126

Отрезок AM — медиана треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{CA}$ через векторы $\overrightarrow{BA} = \vec{x}$ и $\overrightarrow{MC} = \vec{y}$.



Ответ.

$\overrightarrow{BM}$ = _____

$\overrightarrow{AM}$ = _____ − _____

$\overrightarrow{CA}$ = $-\vec{y}$ − _____ + _____

127

Найдите вектор $\vec{x}$, если:

а) $\overrightarrow{PO} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$; б) $\vec{x} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{PM}$; в) $\overrightarrow{CM} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$.

Решение.

а) $\overrightarrow{PO} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$, следовательно, $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PM}$ + _____, откуда $\vec{x}$ = $= \overrightarrow{PO}$ − _____ = $\overrightarrow{PO}$ + _____ = _____

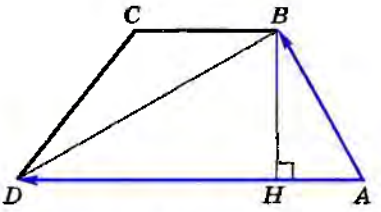
б) $\vec{x} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{PM}$, откуда $\vec{x}$ = _____ + _____ = _____

в) $\overrightarrow{CM} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$, поэтому $\vec{x}$ = $\overrightarrow{CM}$ − _____ = $\overrightarrow{CM}$ + _____ = _____

Ответ. а) _____; б) _____; в) _____

128

В трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 120°$, $AD = 6$ м, $AB = 3$ м. Найдите $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$.



Решение.

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ = _____, следовательно, $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$ = |_____| = _____. Так как $AD \parallel$ _____, то $\angle BAD = 180° - \angle$ _____ = $=$ _____

Проведем высоту BH трапеции. В треугольнике ABH имеем: $BH = AB \cdot \sin$ ___ = ___ · _____ = _____ (м), $HA = AB \cdot$ _____ = $=$ _____ · _____ = _____ (м). Тогда $DH = AD -$ _____ = _____ (м).

Из треугольника BHD по теореме Пифагора находим:

BD^2 = _____ + _____ = (_____ + _____) = _____ (м^2),

откуда BD = _____ м.

Итак, $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$ = _____ = _____ м.

Ответ. _____

§ 3 Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач

129

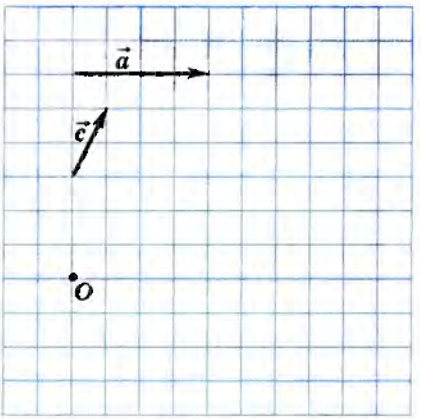
Отложите от точки O векторы $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{y} = 2\vec{c}$, $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{c}$.

Р е ш е н и е.

Так как $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}$, то, согласно определению произведения вектора на число, $\vec{x} \uparrow\uparrow$ ___ и $|\vec{x}| =$ ___ $|\vec{a}|$. Отложим от точки O вектор $\vec{x}$.

Аналогично $\vec{y}$ ___ $\vec{c}$ и $|\vec{y}| =$ ___. Отложим от точки O вектор ___

$\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{a} +$ ___ $= \vec{x} +$ ___. Так как векторы $\vec{x}$ и ___ отложены от точки ___, строить вектор $\vec{z} = \vec{x} +$ ___ удобно по правилу _____. Строим вектор ___



130

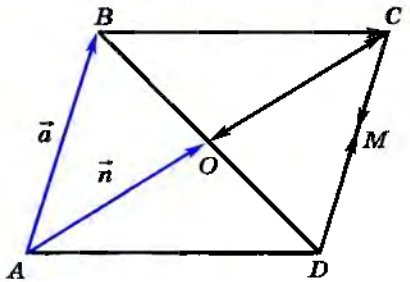
На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$, где $DM = CM$, $\vec{AO} = \vec{n}$, $\vec{AB} = \vec{a}$.

Выразите:

а) векторы $\vec{AC}$ и $\vec{CO}$ через вектор $\vec{n}$;

б) векторы $\vec{DM}$ и $\vec{CM}$ через вектор $\vec{a}$;

в) вектор $\vec{BC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$.



Р е ш е н и е.

а) Так как точка O является точкой пересечения _____ параллелограмма, то $AO =$ _____, и, значит, $|\vec{AC}| =$ ___ $|\vec{AO}|$. Кроме того, $\vec{AC} \uparrow\uparrow$ _____, следовательно, согласно определению произведения вектора на число, $\vec{AC} =$ ___ $\vec{AO} =$ ___ $\vec{n}$. Далее, $|\vec{CO}|$ ___ $|\vec{AO}|$ и $\vec{CO}$ ___ $\vec{AO}$, поэтому $\vec{CO} =$ ___ $\vec{AO} =$ _____

б) Противоположные стороны параллелограмма _____ и _____, поэтому $\overrightarrow{DC}$ ___ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Далее, $\overrightarrow{DM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{DM}| =$ ___ $|\overrightarrow{DC}|$, следовательно, согласно определению _____ вектора на _____, $\overrightarrow{DM} =$ ___ $\overrightarrow{DC} =$ ___ $\vec{a}$. Так как $CM \uparrow\downarrow DC$ и $|CM| =$ ___ $|\overrightarrow{DC}|$, то $\overrightarrow{CM} =$ ___ $\overrightarrow{DC} =$ _____

в) По правилу треугольника $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} +$ _____. Но $\overrightarrow{BA} = -$ _____ = $= -\vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = 2\vec{n}$, следовательно, $\overrightarrow{BC} =$ _____ + _____

Ответ.

а) _____

б) _____

в) _____

131

Упростите выражение:

а) $-0{,}5(12\vec{a})$;

б) $2{,}5\vec{b} - 1{,}7\vec{b}$;

в) $3(\vec{c} + \vec{p}) - 5\vec{p}$;

г) $2(5\vec{p} - 3\vec{q}) - 3(3\vec{p} - 2\vec{q})$.

Решение.

а) $-0{,}5(12\vec{a}) =$ (_____ · _____)$\vec{a} =$ _____

б) $2{,}5\vec{b} - 1{,}7\vec{b} =$ (_____)$\vec{b} =$ _____

в) $3(\vec{c} +$ ___$) - 5\vec{p} =$ _____ + _____ − _____ = _____ + (_____) = $=$ _____ + (_____)$\vec{p} =$ _____ − _____

г) $2(5\vec{p} -$ _____$) - 3($_____$ - 2\vec{q}) =$ _____$\vec{p} -$ _____$\vec{q} -$ _____$\vec{p} +$ $+$ _____ = _____ + _____ = _____

Ответ. а) _____; б) _____; в) _____; г) _____

132

Докажите, что векторы $\vec{c} = 2(\vec{a} + 1{,}5\vec{p}) - 3\vec{p}$ и $\vec{a}$ коллинеарны.

Доказательство.

$\vec{c} = 2(\vec{a} +$ _____$) - 3\vec{p} = 2\vec{a} +$ _____ $- 3\vec{p} = 2\vec{a} +$ (_____)$\vec{p} = 2\vec{a} +$ $+$ _____$\vec{p} =$ _____$\vec{a}$. По определению произведения вектора на _____ векторы $\vec{a}$ и $2\vec{a}$ _____, что и требовалось _____

133

Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливы равенства:
а) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; б) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

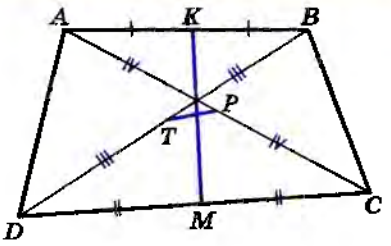
Доказательство.

Если $\vec{a} = \vec{0}$, то обе части каждого равенства — нулевые векторы, поэтому равенства справедливы. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$.

а) По определению произведения вектора на _____ $|1 \cdot \vec{a}| = |__|\cdot|__| = 1 \cdot |__| = |__|$, а так как число 1 положительно, то векторы $1 \cdot \vec{a}$ и $\vec{a}$ _____. Следовательно, по определению равных векторов $1 \cdot \vec{a}$ ___ $\vec{a}$.

б) По определению _____ вектора на число $|(-1) \cdot \vec{a}| = |____|\cdot|__| = __\cdot|__| = |__|$, а так как -1 ___ 0, то векторы $(-1) \cdot \vec{a}$ и $\vec{a}$ противоположно _____. По определению противоположного вектора $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$ и $-\vec{a} \uparrow\downarrow$___. Следовательно, $|(-1)\vec{a}|$ ___ $|-\vec{a}|$ и $(-1)\vec{a} \uparrow\uparrow$___, т. е. $(-1) \cdot \vec{a}$ ___ $-\vec{a}$.

134



Точки K и M — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, изображенного на рисунке, точки P и T — середины диагоналей AC и BD. Докажите, что середины отрезков KM и PT совпадают.

Доказательство.

Пусть точка X — середина отрезка KM, точка Y — середина отрезка PT. Тогда для произвольной точки O имеем:

$$\vec{OX} = \frac{1}{2}(\vec{OK} __ \vec{OM}) \quad (1)$$

и

$$\vec{OY} = __ (\vec{OP} + \vec{OT}). \quad (2)$$

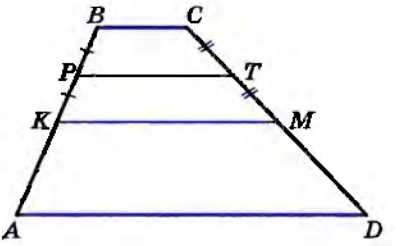
По условию задачи точки K и M — середины отрезков AB и _____, следовательно, $\vec{OK} = __ (\vec{OA} + _____)$ и $\vec{OM} = __ (\vec{OC} + _____)$. Аналогично $\vec{OP} = __ (\vec{OA} + \vec{OC})$ и $\vec{OT} = __ (\vec{OB} + _____)$.

Подставляя найденные выражения в формулы (1) и (2), получим:
$\vec{OX} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) + __ (\vec{OC} + \vec{OD})) = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + _____)$,
$\vec{OY} = __ (__ (\vec{OA} + \vec{OC}) + __ (\vec{OB} + _____)) = __ (\vec{OA} + \vec{OB} + _____ + _____)$.

Отсюда следует, что $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY}$. Так как от точки O можно отложить только _____ вектор, равный данному, то точки X и ___ совпадают, следовательно, совпадают середины отрезков _____ и _____, что и требовалось доказать.

135

В трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, $AK = KB$, $CM = MD$, $BP = PK$, $CT = TM$, $BC = 2$ м, $AD = 8$ м. Найдите PT.



Р е ш е н и е.

Так как $AK =$ _____ и $CM =$ _____, то отрезок KM — средняя _____ трапеции, следовательно, KM ___ BC и $KM =$ ___$(BC +$ _____$) =$ ___$(2 +$ ___$) =$ $=$ ___ (м).

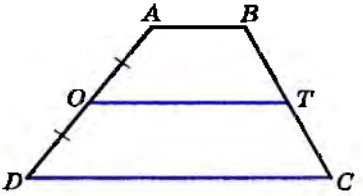
В четырехугольнике $BCMK$ стороны BC и KM _____ _____, а стороны BK и _____ не параллельны, следовательно, $BCMK$ — _____. По условию задачи $BP =$ $=$ _____ и $CT =$ _____, поэтому отрезок PT — средняя _____ трапеции $BCMK$, и, следовательно, $PT =$ ____ $(BC +$ _____$) =$ $=$ _____ $=$ _____ (м).

О т в е т.

_____

136

Прямая OT параллельна основанию CD трапеции $ABCD$, причем $AO = OD$. Докажите, что отрезок OT — средняя линия трапеции.



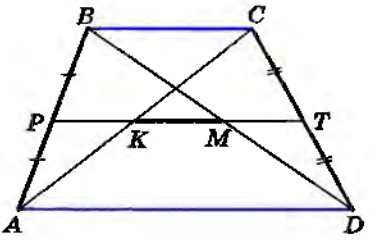
Д о к а з а т е л ь с т в о.

В соответствии с определением средней _____ трапеции нужно доказать, что точка T является _____ стороны BC.

Предположим, что это не так, и пусть серединой стороны BC является точка X. Тогда отрезок OX — _____ линия трапеции, поэтому OX ___ CD. Но по условию задачи OT ___ CD.

Итак, через точку O проходят _____ прямые, параллельные прямой _____, что противоречит _____ параллельных прямых. Следовательно, точка T — _____ BC, т. е. отрезок OT — _____ трапеции, что и требовалось _____

137



В трапеции $ABCD$ отрезок PT — средняя линия, $AD = 9$ м, $BC = 5$ м. Найдите длину отрезка KM.

Р е ш е н и е.

По свойству средней _____ трапеции PT ___ BC и $PT =$ ___ $(AD +$ $+$ _____$)$. В треугольнике ABC отрезки AP и PB равны и прямая PK параллельна стороне _____, следовательно, отрезок PK — _____ линия треугольника ABC (задача 65). Поэтому $PK =$ ___ BC. Аналогично в треугольнике BCD $TM = \frac{1}{2}$ _____

Итак, $KM = PT - (PK +$ _____$) =$ ___$(BC +$ _____$) - (\frac{1}{2}$ _____ $+$ $+$ ___ $BC) =$ ___ $BC +$ ___ $AD -$ _____ $= \frac{1}{2}(AD -$ _____$) =$ ___ $(9 -$ ___$) =$ $=$ ___ (м).

О т в е т. _____

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава V. Четырехугольники

§ 1. Многоугольники 3
§ 2. Параллелограмм и трапеция 5
§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат 11

Глава VI. Площадь

§ 1. Площадь многоугольника 14
§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции 16
§ 3. Теорема Пифагора 21

Глава VII. Подобные треугольники

§ 1. Определение подобных треугольников 23
§ 2. Признаки подобия треугольников 25
§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач 27
§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника 33

Глава VIII. Окружность

§ 1. Касательная к окружности 37
§ 2. Центральные и вписанные углы 40
§ 3. Четыре замечательные точки треугольника 44
§ 4. Вписанная и описанная окружности 49

Глава IX. Векторы

§ 1. Понятие вектора 53
§ 2. Сложение и вычитание векторов 54
§ 3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач 60